

FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

17



Palchetto

Num.° d'ordine

12 347

NAZIONALE

B. Prov.

I

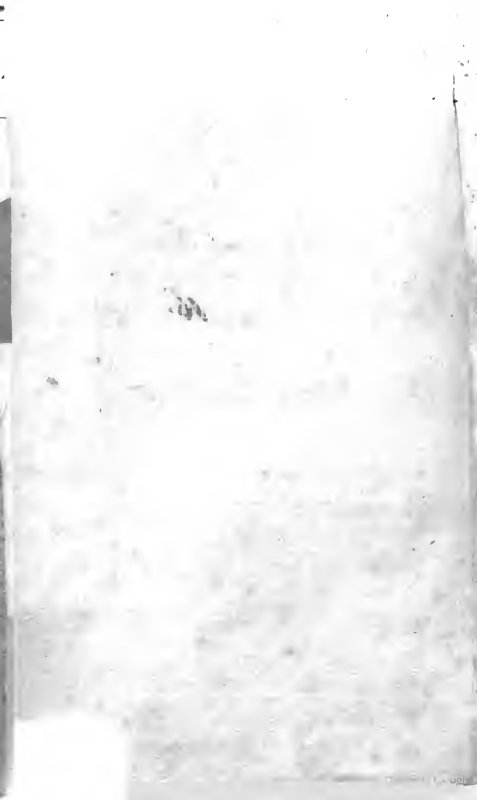
589

NAPOLI

VITT. EM. III

R. BIBLIOTECA

BP
189



ÉLÉMENTS
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL.

1892

606955
SBN

ÉLÉMENTS
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR J.-L. BOUCHARLAT,

Professeur de Mathématiques transcendantes, dans la Division
d'Artillerie, au Prytanée militaire.



PARIS,

M^{me} V^e COURCIER, Imprim.-Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins, n^o 57.

1824.

On trouve chez le même Libraire, la Théorie des Courbes et des Surfaces
du second ordre, précédée des Principes fondamentaux de la Géométrie
analytique, par J.-L. Boucharlat, seconde édition, revue et augmentée,
1 vol. in-8. Prix, 5 fr.

TABLE DES MATIÈRES.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Pages.

DE la différentiation des quantités algébriques.	1
Des différentielles successives.	16
Théorème de Maclaurin.	17
De la différentiation des quantités transcendantes.	19
Des différentielles logarithmiques.	22
Des différentielles des sinus, cosinus et autres lignes trigonométriques, ou des différentielles des fonctions circulaires.	25
De la différentiation de quelques fonctions transcendantes compliquées.	27
Théorème de Taylor.	28
Application de la formule de Taylor au développement en série de diverses fonctions.	31
De la différentiation des équations à deux variables.	33
De la méthode des tangentes.	39
Des asymptotes des courbes.	43
De l'équation du plan tangent à une surface courbe, et de celle de la normale à cette surface.	45
Des fonctions qui, pour une valeur de la variable, deviennent $\frac{0}{0}$	48
Des maxima et minima, dans les fonctions d'une seule variable.	55
Application de la théorie des maxima et minima à la solution des divers problèmes.	61
De la signification géométrique des coefficients différentiels.	72
Théorie des courbes osculatrices, comprenant celle des contacts des courbes, et les propriétés du rayon de courbure et de la développée.	78
Des courbes transcendantes.	100
De la spirale d'Archimède ou de Conon.	<i>Id.</i>

De la logarithmique.	101
De la cycloïde.	102
De la méthode des infiniment petits.	111
Des cas où la formule de Taylor est en défaut.	116

CALCUL INTÉGRAL.

De l'intégration des différentielles monomes.	123
Des différentielles complexes dont l'intégration peut s'effectuer par la règle de l'art. 185.	127
Des différentielles qui s'intègrent par arcs de cercle.	130
De l'intégration par parties.	135
De l'intégration par les séries.	137
De la méthode des fractions rationnelles.	147
De l'intégration des fonctions irrationnelles.	174
De l'intégration des différentielles binomes.	185
Des formules de réduction des différentielles binomes.	185
De la quadrature des courbes.	192
De la rectification des courbes.	198
De la détermination de l'aire des solides de révolution.	201
De la cubature des solides de révolution.	207
De l'intégration des fonctions de deux variables ; comprenant : 1°. la séparation des variables par le moyen de la division on lorsque les équations sont homogènes ; 2°. les conditions d'intégrabilité des fonctions de plusieurs variables , et l'inté- gration des fonctions qui remplissent ces conditions.	214
Du développement des puissances des cosinus et des sinus en fonction des arcs multiples.	236
De l'intégration des quantités qui renferment des sinus et des cosinus.	242
De l'intégration des quantités exponentielles et logarithmiques.	247
Théorie des constantes arbitraires.	250
Des équations linéaires.	251

FIN DE LA TABLE.

ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL

CALCUL DIFFÉRENTIEL



De la différentiation des quantités algébriques.

1. On dit qu'une variable est fonction d'une autre variable, lorsque la première est égale à une certaine expression analytique de la seconde; par exemple, y est une fonction de x dans les équations suivantes :

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, y = x^3 - 3bx^2, y = \frac{x^2}{a}, y = b + cx^3.$$

2. Considérons une fonction dans son état d'accroissement, en vertu de celui de la variable qu'elle renferme : toute fonction d'une variable x pouvant être représentée par l'ordonnée d'une courbe AMM' , fig. 1, soient donc FIG. 1 : $AP = x$ et $PM = y$, les coordonnées d'un point M de cette courbe, et supposons que l'abscisse AP reçoive un accroissement $PP' = h$; l'ordonnée PM deviendra $P'M' = y'$. Pour obtenir la valeur de cette nouvelle ordonnée, on voit donc qu'il faut changer x en $x + h$ dans l'équation de la courbe, et la valeur que cette équation déterminera alors pour y sera celle de y' .

Par exemple, si l'on avait l'équation $y = mx^2$, on obtiendrait y' en changeant x en $x + h$ et y en y' , et l'on aurait

$$y' = mx^2 + 2mxh + h^2.$$

3. Prenons maintenant l'équation

$$y = x^3 \dots (1),$$

et supposons que y devienne y' lorsque x devient $x + h$; nous aurons donc

$$y' = (x + h)^3;$$

et en développant,

$$y' = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3;$$

si de cette équation nous retranchons l'équation (1) il restera

$$y' - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3;$$

et en divisant par h ,

$$\frac{y' - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \dots (2).$$

Voyons ce que ce résultat nous apprend : $y' - y$ représente l'accroissement de la fonction y en vertu de l'accroissement h donné à x , puisque cette différence $y' - y$ est celle du nouvel état de grandeur de y à son état primitif.

D'une autre part l'accroissement de x étant h , il suit de là que l'expression $\frac{y' - y}{h}$ est le rapport de l'accroissement de la fonction y à celui de la variable x . En considérant le second membre de l'équation (2), on voit que ce rapport diminue d'autant plus que h diminue, et que lorsque h devient nul, ce rapport se réduit à $3x^2$.

Ce terme $3x^2$ est donc la limite du rapport $\frac{y' - y}{h}$; c'est vers ce terme qu'il tend lorsqu'on fait diminuer h .

4. Dans l'hypothèse de $h = 0$ l'accroissement de y deve-

nant aussi nul, $\frac{y'-y}{h}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ et par conséquent l'équation (2) devient

$$\frac{0}{0} = 3x^2 \dots (3).$$

Cette équation n'a rien d'absurde, parce que l'algèbre nous apprend que $\frac{0}{0}$ peut représenter toutes sortes de quantités. D'ailleurs on conçoit que puisqu'en divisant les deux termes d'une fraction par un même nombre cette fraction ne change pas de valeur, il en résulte que la petitesse des termes d'une fraction n'influe en rien sur sa valeur, et que par conséquent elle peut rester la même lorsque ses termes sont parvenus au dernier degré de petitesse, c'est-à-dire, sont devenus nuls.

La fraction $\frac{0}{0}$ qui se trouve dans l'équation (3) est un symbole qui a remplacé le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable : comme ce symbole ne laisse aucune trace de cette variable, représentons-le par $\frac{dy}{dx}$; alors $\frac{dy}{dx}$ nous rappellera que la fonction était y et que la variable était x . Mais dy et dx n'en seront pas moins des quantités nulles et nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \dots (4) :$$

$\frac{dy}{dx}$ ou plutôt sa valeur $3x^2$ est le coefficient différentiel de la fonction y .

5. Remarquons que $\frac{dy}{dx}$ étant le signe qui représente la limite $3x^2$ [comme le montre l'équation (4)], dx doit toujours être placé sous dy . Cependant, pour faciliter les opérations de l'algèbre, on peut momentanément faire

évanouir le dénominateur de l'équation (4), et l'on a $dy = 3x^2 dx$. Cette expression $3x^2 dx$ est la différentielle de la fonction y .

6. Cherchons encore la différentielle de la fonction $a + 3x^2$. Pour cet effet il faut donc dans l'équation $y = a + 3x^2$ faire $x = x + h$, et, en changeant y en y' , cette équation deviendra

$$y' = a + 3x^2 + 6xh + 3h^2;$$

donc $\frac{y' - y}{h} = 6x + 3h$; égalant h à zéro, il nous vient

$\frac{dy}{dx} = 6x$: donc la différentielle cherchée est $dy = 6x dx$.

7. Pour troisième exemple, cherchons la différentielle de $y = ax^3 - b^3$: faisons $x = x + h$, et substituant nous avons

$$y' = ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 - b^3;$$

donc

$$\frac{y' - y}{h} = 3ax^2 + 3axh + ah^2;$$

passant à la limite on a

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2.$$

Tel est le coefficient différentiel de la fonction proposée; la différentielle sera $dy = 3ax^2 dx$.

8. Proposons-nous de trouver encore la différentielle de $y = \frac{1-x^2}{1-x}$: effectuant la division, on trouve $y = 1 + x + x^2$; mettant $x + h$ à la place de x , et y' à celle de y , on obtient

$$y' = 1 + x + h + x^2 + 2hx + h^2,$$

et en ordonnant par rapport à h ,

$$y' = 1 + x + x^2 + (2x + 1)h + h^2;$$

donc

$$\frac{y' - y}{h} = 2x + 1 + h;$$

passant à la limite, on a $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$; donc la différentielle de $\frac{1-x^3}{1-x}$ est $(2x+1)dx$.

9. Prenons encore pour exemple

$$y = (x^2 - 2a^2)(x^2 - 3a^2);$$

développant on a

$$y = x^4 - 5a^2x^2 + 6a^4;$$

substituant $x+h$ à x et y' à y , et ordonnant ensuite par rapport à h , il vient

$$y' = x^4 - 5a^2x^2 + 6a^4 + (4x^3 - 10a^2x)h + (6x^2 - 5a^2)h^2 + 4xh^3 + h^4;$$

donc

$$\frac{y'-y}{h} = 4x^3 - 10a^2x + (6x^2 - 5a^2)h + 4xh^2 + h^3;$$

passant à la limite on a

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 10a^2x;$$

et en multipliant par dx , on trouve que la différentielle est

$$dy = (4x^3 - 10a^2x) dx.$$

10. L'expression dx est elle-même la différentielle de x ; car soit $y=x$, on a $y'=x+h$; donc $y'-y=h$, et passant à la limite après avoir divisé par h , on trouve $\frac{dy}{dx} = 1$; donc $dy=dx$.

On trouverait de même que la différentielle de ax , est adx .

11. Il est à observer que quelquefois l'accroissement de la variable est négatif, dans ce cas il suffit de substituer $x-h$ à x et d'opérer comme précédemment.

Ainsi pour trouver la différentielle de ax^3 lorsque l'accroissement est négatif, on remplacera x par $x-h$ et l'on aura

$$y' = ax^3 - 3ax^2h + 3axh^2 - ah^3;$$

donc

$$\frac{y' - y}{h} = -3ax^2 + 3axh - ah^2;$$

passant à la limite on aura $\frac{dy}{dx} = -3ax^2$, et par conséquent $dy = -3ax^2 dx$.

On voit que cela revient à supposer dx négatif dans la différentielle de y calculée dans l'hypothèse d'un accroissement positif.

12. Avant que d'aller plus loin, faisons une remarque essentielle, c'est que dans une équation dont le second membre est une fonction de x , et que pour cette raison nous représenterons généralement par $y = fx$, si l'on change x en $x + h$ et qu'après avoir ordonné par rapport aux puissances de h on trouve le développement suivant

$$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{etc.},$$

on doit toujours avoir $y = A$. En effet, si l'on fait $h = 0$, le second membre se réduit à A ; à l'égard du premier membre, comme nous n'avons accentué y que pour marquer que y éprouvait un certain changement lorsque x devenait $x + h$, il faudra lorsque h sera nul que nous supprimions l'accent de y , et l'équation (2) se réduira alors à $y = A$.

13. Ceci va nous donner les moyens de généraliser le procédé de la différentiation. En effet, si dans l'équation $y = fx$, dans laquelle on est censé connaître l'expression représentée par fx , on a mis $x + h$ à la place de x , et qu'après avoir ordonné par rapport aux puissances de h on ait obtenu le développement suivant

$$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3,$$

ou plutôt, d'après l'article précédent,

$$y' = y + Bh + Ch^2 + \text{etc.},$$

on aura, en retranchant l'équation primitive de celle-ci :

$$y' - y = Bh + Ch^2 + , \text{ etc. ;}$$

donc

$$\frac{y' - y}{h} = B + Ch + \text{etc. ;}$$

et en passant à la limite $\frac{y}{dx} = B$. Ce qui nous apprend que le coefficient différentiel est égal au coefficient du terme qui contient la première puissance de h dans le développement de $f(x + h)$ ordonné par rapport aux puissances ascendantes de h .

14. Si au lieu d'une fonction y qui s'accroît en vertu d'un accroissement donné à la variable x , nous avons deux fonctions différentes que nous représenterons par y et par z , en substituant dans ces fonctions $x + h$ à x , elles deviendront y' et z' ; ordonnant ensuite par rapport à h , nous pourrions supposer

$$y' = y + Ah + Bh^2 + \text{etc.} \dots (5),$$

$$z' = z + A'h + B'h^2 + \text{etc.} \dots (6);$$

passant à la limite on trouve

$$\frac{dy}{dx} = A, \frac{dz}{dx} = A'. \dots \dots (7);$$

multipliant ensuite les équations (5) et (6) l'une par l'autre, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} z'y' &= zy + Azh + Bzh^2 + , \text{ etc.} \\ &+ A'yh + A'A'h^2 + , \text{ etc.} \\ &+ B'yh^2 + , \text{ etc.} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{z'y' - zy}{h} = Az + A'y + (Bz + A'A + B'y)h + \text{etc. ;}$$

passant à la limite

$$\frac{d.zy}{dx} = Az + A'y;$$

mettant au lieu de A et de A' leurs valeurs données par les équations (7), il nous viendra

$$\frac{d.zy}{dx} = \frac{zdy}{dx} + \frac{ydz}{dx},$$

et en supprimant le diviseur commun dx ,

$$d.zy = zdy + ydz.$$

Ainsi pour trouver la différentielle d'un produit de deux variables, il faut multiplier chacune par la différentielle de l'autre, et ajouter les produits.

15. Au moyen de cette règle on trouvera facilement la différentielle d'un produit de trois variables.

Soit, par exemple, yzu : faisons $yz = t$, nous aurons donc $d.yzu = d.tu$.

Or, d'après ce qui précède,

$$d.tu = tdu + udt. \quad (8)$$

et puisque $t = yz$, on a $dt = ydz + zdy$; mettant donc ces valeurs de t et de dt dans l'équation (8); elle se changera en $d.yzu = yzdu + uyzd + uzdy$.

On voit que la même règle subsiste encore pour un produit de trois variables, c'est-à-dire, qu'il faut écrire le produit yzu , et remplacer successivement chaque variable par sa différentielle, et ajouter ces produits.

16. La même règle a lieu pour un plus grand nombre de variables.

17. Nous avons vu art. 10, que la différentielle de ax était adx ; concluons que lorsqu'il y a une constante dans un produit, il suffit de différencier comme si la constante n'y était pas, et de multiplier ensuite par la constante.

Par exemple, on trouverait que la différentielle de axy est $axy + aydx$.

18. La différentielle d'une constante est 0; car soit $y = ax + b$, en opérant comme dans l'art. 7, on trouve

$dy = adx$, résultat qui est le même que si l'on n'avait point eu la constante b .

19. La différentielle d'une fraction $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{y^2}$; car supposons $\frac{x}{y} = z$, nous avons $x = yz$; donc, art. 14, $dx = ydz + zdy$; d'où nous tirons $yzdz = dx - zdy$: mettant dans le second membre la valeur de z , il vient $yzdz = dx - \frac{x}{y} dy$; réduisant au même dénominateur,

$$yzdz = \frac{ydx - xdy}{y},$$

et enfin

$$dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \text{ ou } d. \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

20. Si dans l'équation $d.yzu = yzdu + yudz + zudy$, art. 15, on divise tous les termes par yzu , on obtiendra

$$\frac{d.yzu}{yzu} = \frac{du}{u} + \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y}.$$

En général, en divisant la différentielle d'un produit d'un nombre quelconque de variables par ce produit, on trouvera

$$\frac{d.xytu, \text{ etc.}}{xyztu, \text{ etc.}} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u}, \text{ etc.} \dots (9).$$

Si x, y, z, t, u , etc., sont égaux à x et en nombre m , on aura dans le second membre de cette équation un nombre m de termes égaux à $\frac{dx}{x}$; ce second membre se changera donc en $\frac{m dx}{x}$ et l'équation (9) deviendra

$$\frac{d.x^m}{x^m} = m \frac{dx}{x},$$

et en multipliant par x^m , on aura

$$d.x^m = m x^{m-1} dx.$$

21. D'où l'on peut conclure cette règle : lorsqu'une variable est élevée à une puissance m , pour avoir la différentielle, il faut, 1°. changer l'exposant en coefficient;

2°. affecter la variable d'un exposant moindre d'une unité; 3°. multiplier ensuite ce produit par dx .

22. Si l'exposant était fractionnaire ou négatif, la même règle aurait lieu. Pour démontrer ce premier cas,

soit $y = x^{\frac{p}{q}}$; en élevant les deux membres à la puissance q , on aura $y^q = x^p$; donc, art. 21, $qy^{q-1} dy = px^{p-1} dx$; d'où l'on tire

$$dy = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} dx;$$

et comme x^{p-1} peut se mettre sous la forme $\frac{x^p}{x}$, et que de même $y^{q-1} = \frac{y^q}{y}$, en mettant ces valeurs, on a

$$dy = \frac{p}{q} \frac{x^p}{y^q} \frac{y}{x} dx;$$

et à cause de $x^p = y^q$ l'équation précédente se réduit à

$$dy = \frac{p}{q} \frac{y}{x} dx;$$

mettant enfin pour y sa valeur, on obtient

$$dy = \frac{p}{q} \frac{x^{\frac{p}{q}-1}}{x} dx,$$

et en faisant passer le diviseur x en exposant, on a

$$dy = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} dx,$$

ce qui est la même chose que la différentielle de $y = x^{\frac{p}{q}}$ qu'on aurait obtenue en faisant usage de la règle du n°. 21.

Pour démontrer le cas où l'exposant est négatif, soit $y = x^{-p}$, ce qui revient à $y = \frac{1}{x^p}$; différenciant par la règle des fractions, art. 21, nous aurons

$$dy = \frac{x^p d1 - 1 \cdot dx^p}{x^p \times x^p}$$

Observant que l'unité étant une constante, sa différentielle est nulle, cette expression se réduit à $dy = -\frac{d.x^p}{x^{1+p}}$; effectuant la différentiation indiquée, art. 21, on aura $dy = -\frac{px^{p-1}dx}{x^{1+p}}$, et, en retranchant l'exposant $2p$ de l'exposant $p-1$, il vient enfin $dy = -px^{-p-1}dx$, comme on l'aurait trouvé en faisant usage de la règle du n°. 21.

23. Si l'on remplace les radicaux par des exposans fractionnaires, la règle du n°. 21 pourra donc servir à différencier ces sortes de quantités. Par exemple, pour trouver la différentielle de $\sqrt{x}$, on écrira $x^{\frac{1}{2}}$ dont la différentielle sera $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, ce qui nous apprend que *pour avoir la différentielle de la racine carrée d'une quantité variable, il faut diviser la différentielle de cette quantité par le double du radical.*

24. Quelquefois la fonction y et la variable x ne sont pas données par une même équation. Par exemple, si l'on avait les équations $y = fu$ et $u = \varphi x$, le premier moyen qui se présenterait pour obtenir le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ serait d'éliminer u entre ces deux équations, pour pouvoir y appliquer le procédé de la différentiation; mais sans avoir recours à cette opération préliminaire, on peut obtenir immédiatement le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$: c'est ce qui va être l'objet de la démonstration suivante.

Supposons donc que dans l'équation $u = \varphi x$, on mette $x+h$ à la place de x et qu'alors u devienne $u' = u+k$, et qu'en substituant ensuite $u+k$ à la place de u dans

l'équation $y = fu$, la fonction y devienne y' , si l'on développe ces fonctions de u et de x par rapport aux puissances de leurs accroissemens, la substitution de $x + h$ à la place de x dans la fonction u , nous donnera

$$u' = u + qh + q'h^2 + q''h^3 + \text{etc.};$$

Et la substitution de $u + k$ à la place de u dans la fonction y , nous donnera

$$y' = y + pk + pk'^2 + pk''^3 + \text{etc.};$$

donc

$$\left. \begin{aligned} \frac{u' - u}{h} &= q + q'h + q''h^2 + \text{etc.} \\ \frac{y' - y}{k} &= p + p'k + p''k^2 + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots (10).$$

Multipliant ces équations terme à terme, on aura

$$\frac{y' - y}{k} \cdot \frac{u' - u}{h} = (p + p'k + p''k^2 + \text{etc.})(q + q'h + q''h^2 + \text{etc.})$$

Le premier membre de cette équation peut se réduire; car l'accroissement de u étant représenté par k , est donc égal à $u' - u$; par conséquent au lieu de $\frac{y' - y}{k} \cdot \frac{u' - u}{h}$

nous pouvons écrire $\frac{y' - y}{h}$, et en mettant $x' - x$ à la place de x , l'équation précédente devient

$$\frac{y' - y}{x' - x} = (q + q'h + q''h^2 + \text{etc.})(p + p'k + p''k^2 + \text{etc.}) \dots (11)$$

Lorsque h est nul, k s'évanouit aussi (puisque u n'a pris l'accroissement k que parce que x est devenu $x + h$); par conséquent dans le cas où $h = 0$, qui est celui de la limite, l'équation (11) se change en

$$\frac{dy}{dx} = pq \dots (12).$$

Pour déterminer p et q , il faut supposer h et k nuls dans les équations 10, et ces équations donnent

$$\frac{dy}{du} = p, \quad \frac{du}{dx} = q.$$

Substituant ces valeurs de p et de q dans l'équation (12), on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \dots (13).$$

Ce résultat nous apprend que si l'on a deux équations $y = fu$ et $u = \varphi x$, et qu'on en tire les valeurs des coefficients différentiels $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dx}$, il suffira de multiplier ces valeurs entre elles pour avoir celle de $\frac{dy}{dx}$.

25. Si l'on a, par exemple, les équations $y = 3u^2$ et $u = x^2 + ax^2$; on trouvera

$$\frac{dy}{du} = 6u, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax;$$

donc en multipliant ces équations terme à terme on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} = 6u(3x^2 + 2ax) = 6(x^2 + ax^2)(3x^2 + 2ax).$$

26. La formule (13) est d'un grand usage pour différencier des quantités compliquées; donnons-en quelques exemples.

1°. Cherchons la différentielle de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; cela se réduit à trouver le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Pour cet effet, faisons $a^2 - x^2 = u$, alors $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$; et les équations $y = fu$ et $u = \varphi x$, art. 24, sont donc représentées ici par $y = u^{\frac{1}{2}}$ et par $u = a^2 - x^2$.

En différenciant ces équations, art. 21, on trouve

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{du}{dx} = -2x;$$

multipliant ces coefficients différentiels entre eux, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

donc

$$dy = \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Soit encore $y = (a + bx^m)^n$; pour trouver la différentielle, faisons $(a + bx^m) = u$, nous aurons les équations $y = u^n, u = a + bx^m$, donc

$$\frac{dy}{du} = nu^{n-1} = n(a + bx^m)^{n-1}, \frac{du}{dx} = bmx^{m-1};$$

multipliant entre eux ces coefficients différentiels, on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} = bmnx^{m-1} (a + bx^m)^{n-1}.$$

27. Pour troisième exemple soit

$$y = \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^4;$$

supposons

$$b - \frac{c}{x^2} = u \dots (15);$$

donc

$$y = (a + \sqrt{u})^4 \dots (16).$$

Différenciant l'équation (15) nous avons

$$du = \frac{2cx \, dx}{x^4};$$

donc

$$\frac{du}{dx} = \frac{2c}{x^3};$$

l'équation (16) donne

$$dy = 4(a + \sqrt{u})^3 d(a + \sqrt{u}) = 4(a + \sqrt{u})^3 \frac{du}{2\sqrt{u}};$$

et en mettant pour u sa valeur,

$$\frac{dy}{du} = \frac{2 \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{b - \frac{c}{x^2}}}.$$

multipliant ces coefficients différentiels entr'eux on a enfin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{4c}{x^3} \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}} \right)^3}{\sqrt{b - \frac{c}{x^2}}}$$

On pourrait prendre encore pour exemple

$$y = (a + \sqrt{x})^3 \text{ et l'on trouverait } \frac{dy}{dx} = \frac{3(a + \sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$$

28. On a souvent à différencier la somme de plusieurs fonctions d'une variable; quoique d'après ce qui précède il soit évident que cette différentielle est égale à la somme des différentielles de ces fonctions, nous ne laisserons pas que de démontrer ce théorème.

Soit donc

$$y = f x + F x + \varphi x;$$

mettant $x+h$ à la place de x dans ces fonctions, on aura

$$y = f x + A h + A h^2 + \text{etc.} + F x + B h + B' h^2 + \text{etc.} \\ + \varphi x + C h + C' h^2 + \text{etc.};$$

donc

$$y' - y = (A + B + C)h + (A' + B' + C')h^2 + \text{etc.};$$

passant à la limite

$$\frac{dy}{dx} = A + B + C \text{ et } dy = A dx + B dx + C dx.$$

Or, A, B, C étant les termes multipliés par la première puissance de h dans les développemens de $f(x+h)$, de $F(x+h)$ et de $\varphi(x+h)$, il en résulte que $A dx + B dx + C dx$ représentent la somme des différentielles des fonctions proposées.

29. Nous terminerons ce qui précède par une observation, c'est que des expressions qui ne diffèrent que par des termes constans, ont la même différentielle.

Ainsi $m x + n x^2 + a^2$ et $m x + n x^2 + a c - b d$

ont la même différentielle; cela est évident, puisque la différentielle de tout terme constant est égale à zéro.

Des différentielles successives.

30. Soit y une fonction de x , nous trouverons, en la différenciant, un résultat de la forme $p \, dx$ (p étant une quantité qui peut renfermer x). Si p renferme x , nous pourrons encore différencier p , et nous aurons un résultat représenté par $q \, dx$; opérant de même par rapport à q , nous trouverons un résultat de la forme $r \, dx$, ainsi de suite $p \, dx$, $q \, dx$, $r \, dx$, etc., sont les différentielles successives de y . Par exemple, si $y = ax^3$, on trouvera $dy = 3ax^2 \, dx$; donc $p = 3ax^2$. Différenciant de nouveau, on a $dp = 6ax \, dx$; donc $q = 6ax$. Différenciant encore, $dq = 6a \, dx$; donc $r = 6a$. Ici la différentiation ne peut plus avoir lieu, puisque $6a$ est une constante.

Les équations

$$dy = p \, dx \text{ donnent, en divisant par } dx, \frac{dy}{dx} = p,$$

$$dp = q \, dx \dots \dots \dots \frac{dp}{dx} = q,$$

$$dq = r \, dx \dots \dots \dots \frac{dq}{dx} = r.$$

q étant obtenu par deux différentiations successives, et en divisant chaque fois par dx , nous représenterons cette opération par $\frac{d^2 y}{dx^2}$, et nous aurons $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$; de même en différenciant de nouveau et en divisant par dx , nous aurons $\frac{d^3 y}{dx^3}$; ainsi de suite.

dy est la différentielle première de y ;

$d^2 y$ en est la différentielle seconde;

$d^3 y$ en est la différentielle troisième; ainsi de suite.

Théorème de Maclaurin.

31. Soit y une fonction de x ; ordonnons-la par rapport à x et supposons

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} \dots (17),$$

nous trouverons en différenciant et en divisant par dx

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \dots 2C + 2 \cdot 3 Dx + 3 \cdot 4 Ex^2 + \text{etc.},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \dots 2 \cdot 3 D + 2 \cdot 3 \cdot 4 Ex + \text{etc.},$$

etc.

Représentons par (y) ce que devient y quand $x = 0$,

..... par $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ce que devient $\frac{dy}{dx}$ quand $x = 0$,

..... par $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ce que devient $\frac{d^2y}{dx^2}$ quand $x = 0$,

ainsi de suite; les équations précédentes nous donneront

$$(y) = A, \left(\frac{dy}{dx}\right) = B, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2C, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 2 \cdot 3 D;$$

d'où nous tirerons

$$A = (y), B = \left(\frac{dy}{dx}\right), C = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), D = \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right);$$

substituant ces valeurs dans l'équation (17), elle deviendra

$$y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) x^3 \dots (18);$$

telle est la formule de Maclaurin.

32. Pour première application, prenons $y = \frac{1}{a+x}$, nous trouverons en différenciant

$$dy = \frac{(a+x) d1 - 1 \cdot d(a+x)}{(a+x)^2} = - \frac{dx}{(a+x)^2};$$

d'où nous concluons

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{(a+x)^2};$$

différenciant de nouveau, nous trouverons successivement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(a+x)}{(a+x)^4} = \frac{2}{(a+x)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2 \cdot 3(a+x)^2}{(a+x)^6} = -\frac{2 \cdot 3}{(a+x)^4}.$$

Faisant donc $x = 0$ dans les valeurs de y , de $\frac{dy}{dx}$, de $\frac{d^2y}{dx^2}$, nous trouverons

$$(y) = \frac{1}{a}, \left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{a^2}, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{2}{a^3}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = -\frac{2 \cdot 3}{a^4};$$

substituant ces valeurs dans la formule (18), nous obtiendrons

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.}$$

33. Pour seconde application, prenons $y = \sqrt{a^2 + bx}$, nous avons donc

$$y = (a^2 + bx)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (a^2 + bx)^{-\frac{1}{2}} \cdot b = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + bx}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (a^2 + bx)^{-\frac{3}{2}} b^2 = -\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b^2}{\sqrt{(a^2 + bx)^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} (a^2 + bx)^{-\frac{5}{2}} b^3 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} b^3}{\sqrt{(a^2 + bx)^5}};$$

si nous faisons $x = 0$, ces valeurs deviendront

$$(y) = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a, \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2} \frac{b}{a}, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b^2}{a^3}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} b^3}{a^5};$$

substituant dans la formule (18) ces valeurs de (y) , de

$\left(\frac{dy}{dx}\right)$, etc., on trouvera

$$\sqrt{a^2 + bx} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{b^2 x^2}{8a^3} + \frac{b^3 x^3}{16a^5} - \text{etc.}$$

34. Pour troisième exemple, prenons $y = (a+x)^m$; nous trouverons en différenciant

$$\frac{dy}{dx} = m(a+x)^{m-1},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)(a+x)^{m-2},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3};$$

faisant $x=0$, la valeur de y se réduit à a^m , donc $(y) = a^m$, et celles des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, etc., nous donnent

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = ma^{m-1}, \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = m(m-1)a^{m-2}, \quad \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) = m(m-1)(m-2)a^{m-3}.$$

Substituant ces valeurs de (y) , de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, de $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$, etc., dans l'équation (18), on trouve

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}x^2 + m\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3}a^{m-3}x^3 + \text{etc.}$$

De la différentiation des quantités transcendantes.

35. On appelle quantités transcendantes celles qui sont affectées d'exposans variables de logarithmes, de sinus, de cosinus, etc.

36. Proposons-nous de différencier d'abord a^x . Soit donc $y = a^x$, changeons x en $x+h$ et y en y' , cette équation deviendra $y' = a^{x+h}$ ou plutôt $y' = a^x a^h$.

Il faut donc développer cette expression par rapport aux puissances de h ; or, pour que a^h puisse se développer par la formule du binôme, je ferai $a = 1+b$ et par conséquent a^h deviendra

$$(1+b)^h = 1 + h\frac{b}{1} + h(h-1)\frac{b^2}{1.2} + h(h-1)(h-2)\frac{b^3}{2.3} + \text{etc.} \dots (19).$$

On ordonnera par rapport à h ; mais sans effectuer cette opération, comme nous n'avons besoin que des termes multipliés par la première puissance de h , nous remarquerons que si dans un produit tel que $h(h-1)(h-2)(h-3)$, etc., la partie $(h-1)(h-2)(h-3)$, etc., est composée de n facteur, son développement d'après la théorie des équations sera de la forme $h^n + Ah^{n-1} + Bh^{n-2} \dots + Mh + N$, et que le terme N se composera du produit des secondes parties $-1, -2, -3$, etc., des binômes $h-1, h-2, h-3$, etc.; or puisque $h(h-1)(h-2)(h-3)$, etc. $\equiv h(h^n + Ah^{n-1} \dots + Mh + N)$, il est bien évident que le terme qui contient la première puissance de h dans ce produit sera Nh ou d'après ce qui précède sera $(-1 \times -2 \times -3, \text{ etc.}) h$, d'où l'on peut conclure que pour trouver dans le développement 19, les termes affectés de la première puissance de h , dans les termes compliqués de ce développement, c'est-à-dire, à partir du troisième, on formera ainsi les différens coefficients de h : le coefficient de h se composera du produit des nombres soustraits de h par $\frac{b^2}{1.2}$ dans le troisième terme, ou par $\frac{b^3}{2.3}$ dans le quatrième, et ainsi de suite.

Il suit de là que

$$a^h = 1 + \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.} \right) h + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.}$$

Représentons $\left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3}, \text{ etc.} \right)$ par A , nous aurons

$$a^h = 1 + Ah + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.};$$

substituant cette valeur dans l'équation $y' = a^x a^h$, cette équation deviendra

$$y' = a^x + Aa^x h + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.}$$

Si nous retranchons l'équation primitive $y = a^x$, il restera $y' - y = Aa^x h + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.}$, passant à la limite $\frac{dy}{dx} = Aa^x$; et par conséquent en mettant la valeur de y , $\frac{d \cdot a^x}{dx} = Aa^x \dots (20)$.

La constante A dépend de a ; car si dans l'équation

$$A = (b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.}),$$

on met pour b sa valeur $a - 1$ on trouvera

$$A = (a - 1) - \frac{(a - 1)^2}{2} + \frac{(a - 1)^3}{3} - \text{etc.} \dots (21).$$

37. Pour déterminer la valeur de la constante A cherchons, par le théorème de Maclaurin, le développement de a^x , nous avons donc

$$y = a^x,$$

$$\frac{dy}{dx} = A a^x,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{A d \cdot a^x}{dx} = A \frac{A a^x dx}{dx} = A^2 a^x,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} \dots = A^3 a^x, \text{ etc.}$$

Faisons $x = 0$, nous trouverons $(y) = a^0 = 1$, $(\frac{dy}{dx}) = A$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} = A^2$, $(\frac{d^3 y}{dx^3}) = A^3$, etc. Substituant ces valeurs dans

l'équation (18), nous trouverons

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.};$$

faisons $x = \frac{1}{A}$, cette équation deviendra

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.};$$

nommons e le second membre de cette équation, elle se

change en $a^{\frac{1}{A}} = e$, d'où l'on tire $a = e^A$;

prenant les logarithmes, on a

$\log a = \log e^A = A \log e$; donc

$$A = \frac{\log a}{\log e} \dots (22).$$

Le nombre e dont la valeur est donnée par l'équation $e = 1 + 1 \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$, est la base que Néper choisit pour calculer ses tables de logarithmes.

Comme la série $1 + 1 \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$, est assez convergente, on peut se borner à prendre les dix premiers termes de cette suite, et alors on trouve que e vaut environ 2,7182818. Si nous représentons par La le logarithme de a dans le système népérien, nous aurons donc $a = (2,7182818)^{La}$, ou plus simplement $a = e^{La}$; donc $\log a = \log e^{La}$ et $\log a = La \log e$; d'où nous tirons $\frac{\log a}{\log e} = La$, ce qui réduit l'équation (20) à $A = La$, et par conséquent l'équation (20) donne

$$da^x = a^x La \dots (23)$$

Des différentielles logarithmiques.

38. Soit x , le log de y , dans le système dont la base est a , on a $y = a^x$ donc (art. 37) $dy = A a^x dx$, d'où l'on tire

$$dx = \frac{dy}{A a^x} = \frac{dy}{\log a \cdot a^x} = \frac{dy \log e}{a^x \log a};$$

et comme $a^x = y$, et que $x = \log y$, l'équation précédente devient

$$d. \log y = \frac{dy \log e}{y \log a}.$$

Dans le cas où l'on prend les logarithmes dans le système népérien $\frac{\log e}{\log a} = \frac{\log e}{\log e} = 1$, donc alors $d. \log y = \frac{dy}{y}$,

Des différentielles des sinus, cosinus et autres lignes trigonométriques, ou des différentielles des fonctions circulaires.

39. *L'arc est plus grand que le sinus, et plus petit que la tangente.*

Pour le démontrer, soit AB , fig. 2, un arc qui a BE FIG. 2. pour sinus et DA pour tangente, et prenons l'arc AB' égal à l'arc AB . En considérant la corde BB' comme une ligne droite, BB' est plus courte que l'arc BAB' . Donc la droite BE , qui est la moitié de la corde BB' , est plus courte que l'arc BA , moitié de l'arc BAB' ; d'où il résulte que le sinus est moindre que l'arc.

Pour démontrer que la tangente est plus grande que l'arc, nous avons

Aire du triangle $DD'C >$ aire du secteur $BAB'C$;
ou en mettant les expressions géométriques de ces aires,

$$DD' \times \frac{1}{2} AC > \text{arc } BAB' \times \frac{1}{2} AC;$$

supprimant $\frac{1}{2} AC$ de part et d'autre, il reste

$$DD' > \text{arc } BAB',$$

et en prenant la moitié, on a

$$DA > \text{arc } BA.$$

40. Il résulte, de ce qui précède, que la limite du rapport du sinus à l'arc est l'unité; car lorsque l'arc h représenté par AB devient nul, le sinus se confondant avec la tangente, à plus forte raison le sinus se confond avec l'arc qui est compris entre la tangente et le sinus, par conséquent on a dans le cas de la limite $\frac{\sin h}{\text{arc } h}$, ou plutôt $\frac{\sin h}{h} = 1$.

41. Pour trouver la différentielle du sinus dont l'arc est x , supposons donc que cet arc reçoive un accroissement h , nous savons par la trigonométrie que

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x \dots (23).$$

Retranchant de cette fonction son état primitif et divisant par l'accroissement h de la variable, nous aurons

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}.$$

Rassemblant entre des parenthèses les termes multipliés par $\sin x$ dans le deuxième membre, on trouvera

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\sin h \cos x}{h} \dots (24).$$

Quand h devient 0, $\cos h - 1$ devient aussi nul et $\frac{\cos(h-1)}{h}$ se réduit à $\frac{0}{0}$; il convient donc de mettre ce terme sous une autre forme: pour cela l'équation $\cos^2 h + \sin^2 h = 1$ me donne $\cos^2 h - 1 = -\sin^2 h$, ou $\cos h - 1 = (\cos h + 1) = -\sin^2 h$; d'où je tire $\cos(h-1) = -\frac{\sin^2 h}{\cos h + 1}$: substituant cette valeur dans l'équation (24), cette équation devient

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = -\sin x \frac{\sin h}{\cos(h+1)} \frac{\sin h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \dots (25).$$

Dans le cas de $h = 0$, $\frac{\sin h}{h} = 1$ et $\frac{\sin h}{\cos h + 1} = \frac{0}{2} = 0$; l'équation (25) se réduit donc à $\frac{d. \sin x}{dx} = \cos x$; d'où l'on déduit $d. \sin x = \cos x dx$.

42. Dans cette démonstration le rayon des tables a été pris pour unité; mais si l'on voulait la différentielle d'un

sinus dont le rayon serait a , au lieu d'employer l'équation (23), on se servirait de celle-ci

$$\sin(x + h) = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x}{a}.$$

Dans le résultat précédent il faudrait donc restituer la constante a , ce qui donnerait $d. \sin x = \frac{dx \cos x}{a}$, pour la différentielle du sinus d'un arc dont le rayon est a .

43. On peut parvenir à la différentielle de $\sin x$ par des considérations géométriques; car, soit AB , fig. 3, l'arc x , BM , l'arc h , FIG. 3. la perpendiculaire BP sera donc $\sin x$, et la perpendiculaire MQ sera $\sin(x + h)$; cela posé, plus l'arc $BM = h$ diminue, plus l'angle MBC tend à devenir droit; par conséquent, dans le cas de la limite, on peut considérer l'angle MBC comme droit; alors le triangle MBD devient semblable au triangle BCP , puisque dans cette circonstance ces triangles ont leurs côtés perpendiculaires; d'où il suit qu'on a la proportion

$$BC : CP :: BM : MD,$$

ou

$$r : \cos x :: BM : \sin(x + h) - \sin x,$$

d'où

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{BM} = \frac{\cos x}{r};$$

passant à la limite et observant que dans ce cas la corde BM peut être remplacée par l'arc $BM = h$, l'équation précédente deviendra $\frac{d. \sin x}{dx} = \frac{\cos x}{r}$, et en prenant le rayon égal à l'unité,

$$d. \sin x = dx \cos x.$$

44. Pour trouver la différentielle de $\cos x$, l'équation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ou plutôt $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ étant différenciée, article 21, donne $2 \sin x d. \sin x + 2 \cos x d. \cos x = 0$, d'où l'on tire

$$d. \cos x = - \frac{\sin x d. \sin x}{\cos x};$$

mettant pour $d. \sin x$ sa valeur $dx \cos x$, art. 41, et réduisant, on a $d. \cos x = -dx \sin x$.

45. On obtient la différentielle de $\tan x$ en considérant que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; différenciant cette équation par l'art. (19), on trouve

$$d. \tan x = \frac{\cos x d. \sin x - \sin x d. \cos x}{\cos^2 x};$$

mettant les valeurs de $d. \sin x$ et de $d. \cos x$, on aura

$$d. \tan x = \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx; \text{ donc}$$

$$d. \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ puisque } \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

46. On sait par la trigonométrie que le rayon est moyenne proportionnelle entre la tangente et la cotangente, et entre le cosinus et la secante, ce qui donne

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}; \text{ en différenciant la première de ces équations (art. 19), on trouve } d. \cot x =$$

$$- \frac{d. \tan x}{\tan^2 x} = - \frac{dx}{\cos^2 x \tan^2 x} = - \frac{dx}{\sin^2 x}; \text{ car de l'équation } \frac{\sin}{\cos} = \tan, \text{ on tire } \cos \tan = \sin.$$

47. L'équation $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ étant différenciée donne

$$d. \sec x = - \frac{d. \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \tan x \sec x dx.$$

48. On déterminerait de même la différentielle de la cosécante; car, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$; différenciant on a

$$\begin{aligned} d. \operatorname{cosec} x &= - \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \frac{1}{\tan x} \operatorname{cosec} x dx = \cot x \operatorname{cosec} x dx. \end{aligned}$$

49. A l'égard du sinus verse, en différenciant l'équation

sin verse $x + \cos x = 1$, on trouve d. sin verse $x = d(1 - \cos x)$ et en effectuant la différentiation d. sin verse $x = \sin x \, dx$.

De la différentiation de quelques fonctions transcendentes compliquées.

50. Les principes précédens suffiraient, pour pouvoir différencier toute expression affectée de quantités transcendentes.

Soit $y = a^{b^x}$ faisons $b^x = u$, nous aurons $y = a^u$; différencions par l'art. (37), nous trouverons

$$\frac{dy}{du} = a^u L a = a^{b^x} L a, \frac{du}{dx} = b^x L b;$$

$$\text{donc (art. 24)} \frac{dy}{dx} \times \frac{du}{dx} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = a^{b^x} b^x L a L b.$$

51. Soit encore $y = z^v$; prenant les logarithmes, on a $\log y = v \log z$, donc d. $\log y = v \, d. \log z + \log z \, dv$; mettant pour les différentielles logarithmiques leurs valeurs (art. 38), nous trouverons

$$\frac{dy}{y} = v \frac{dz}{z} + \log z \, dv, \text{ et par conséquent}$$

$$dy = y \left(v \frac{dz}{z} + \log z \, dv \right), \text{ ou plutôt } dy = z^v \left(v \frac{dz}{z} + \log z \, dv \right).$$

Au moyen de cette différentielle on trouvera facilement celle de $y = z^{t^u}$; car soit $t^u = v$, l'équation se réduit à $y = z^v$; or, les équations $y = z^v$ et $v = t^u$ qui sont de même forme que l'équation dont nous venons de trouver la différentielle, donneront

$$dy = z^v \left(v \frac{dz}{z} + \log z \, dv \right);$$

$$dv = t^u \left(u \frac{dt}{t} + \log t \, du \right).$$

Substituant dans la valeur de dy donnée par cette avant-dernière équation celles de dv et de v , nous aurons

$$dy = z t^u \left[t^u \frac{dz}{z} + \log z t^u \left(u \frac{dt}{t} + \log t du \right) \right] = z t^{2u} \left(\frac{dz}{z} + u \log z \frac{dt}{t} + \log z \log t du \right).$$

Théorème de Taylor.

52. Avant que d'aller plus loin, nous remarquerons que dans le calcul différentiel une expression telle que $\frac{dy}{dx}$, signifie qu'une fonction y d'une ou de plusieurs variables a été différenciée par rapport à la variable x et divisée par dx ; par exemple, si l'on avoit $y = ax^2 u^3 z^4$, l'expression $\frac{dy}{dx}$ se trouverait en regardant u et z comme constans, et en différenciant par rapport à x et divisant ensuite par dx : ainsi on auroit $\frac{dy}{dx} = 2ax u^3 z^4$. On trouverait de même $\frac{dy}{dz} = 4ax^2 z^3 u^3$ et $\frac{dy}{du} = 3ax^2 z^4 u^2$.

Si l'on avoit $y = x^2 + z^2$, $\frac{dy}{dx}$ serait $2x$.

53. Si dans une fonction y de x , la variable x change en $x + h$, on a le même coefficient différentiel lorsque x est variable et h constant, que lorsque h est variable et x constant.

Pour le démontrer, si dans l'équation $y = fx$, nous mettons $x + h = x'$ à la place de x , nous aurons $y = fx'$; la différentielle de fx' sera égale à une autre fonction de x' représentée par $\varphi x'$ et multipliée par dx' , par

conséquent $dy' = \varphi(x') dx'$ ou en mettant pour x' sa valeur $x + h$ on aura

$$dy' = \varphi(x + h) d(x + h).$$

Or, le seul changement qu'apporte dans cette différentielle l'hypothèse de x variable et de h constant, n'est que dans le facteur $d(x + h)$, qui se réduit à dx ; l'on a donc alors

$$dy' = \varphi(x + h) dx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy'}{dx} = \varphi(x + h).$$

Si, au contraire, on fait x constant et h variable, le facteur $d(x + h)$ se réduit à dh , et l'on a

$$dy' = \varphi(x + h) dh,$$

et par conséquent

$$\frac{dy'}{dh} = \varphi(x + h);$$

égalant ces deux valeurs de $\varphi(x + h)$, il nous vient

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}.$$

Par exemple, si l'on avait $y = ax^3$, en mettant $x + h$ à la place de x , on trouverait

$$\frac{dy'}{dx} = 3a(x + h)^2 = \frac{dy'}{dh}.$$

54. En différenciant de nouveau $\varphi(x + h)$, on conclura par le même raisonnement que $\frac{d^2 y'}{dx^2} = \frac{d^2 y'}{dh^2}$, et que $\frac{d^3 y'}{dx^3} = \frac{d^3 y'}{dh^3}$, et ainsi de suite.

55. Cela posé, soit y' une fonction de $x + h$, cette

fonction étant développée par rapport aux puissances de h , supposons qu'on ait

$$y' = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \dots (25),$$

A, B, C , etc. étant des fonctions inconnues de x , qu'il s'agit de déterminer. Pour cet effet en différenciant par rapport à h , et en divisant par dh , on aura

$$\frac{dy'}{dh} = A + 2Bh + 3Ch^2 + \text{etc.};$$

différenciant ensuite par rapport à x et divisant par dx , nous aurons

$$\frac{d^2 y'}{dx dh} = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} h + \frac{dC}{dx} h^2 + \text{etc.}$$

Les premiers membres de ces équations étant égaux en vertu de l'art. 53, les seconds membres seront identiques; égalant donc entr'eux les coefficients des mêmes puissances de h , on trouvera

$$A = \frac{dy}{dx}, B = \frac{d^2 y}{2 dx^2}, C = \frac{d^3 y}{3 dx^3}, D = \frac{d^4 y}{4 dx^4}, \text{etc.}$$

Substituant la valeur de A , donnée par la première de ces équations dans la seconde, on aura $B = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$; substituant cette valeur dans celle de C , on aura $C = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3 y}{dx^3}$; ainsi de suite.

Au moyen de ces valeurs de A , de B , de C , etc., l'équation (25) deviendra

$$y' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{2 dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 y}{3 dx^3} \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

ou en mettant pour y' sa valeur,

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{2 dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.}, \text{ ce qui est la formule de Taylor.}$$

Application de la formule de Taylor au développement en série de diverses fonctions.

56. Soit $y' = \sqrt{x+h}$, on a donc $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}};$$

substituant dans la formule de Taylor, on a

$$\sqrt{x+h} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \frac{h^2}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{16} \frac{h^3}{\sqrt{x^5}}, \text{ etc.}$$

57. Soit $y' = \sin(x+h)$, d'où il suit que $y = \sin x$; on peut donc former ainsi les coefficients différentiels successifs,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x, \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x, \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \cos x, \text{ etc.};$$

substituant dans la formule de Taylor, on trouve

$$\sin(x+h) = \sin x + \cos x \frac{h}{1} - \sin x \frac{h^2}{1.2} - \cos x \frac{h^3}{1.3}$$

$$+ \sin x \frac{h^4}{2.3.4} + \cos x \frac{h^5}{2.3.4.5}, \text{ etc.};$$

faisant $x = 0$, alors $\sin x = 0$, et $\cos x = 1$, et ce développement se réduit à

$$\sin h = h - \frac{h^3}{2.3} + \frac{h^5}{2.3.4.5}, \text{ etc.}$$

Si l'on prenait $y' = \cos(x + h)$, on trouverait en opérant comme dans l'exemple précédent, que

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

58. Cherchons encore le développement de $\log(x + h)$, nous avons

$$y' = \log(x + h), \text{ donc } y = \log x,$$

$$dy = d. \log x = \frac{dx}{x}, \text{ donc } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x};$$

on obtiendra ensuite par des différentiations successives,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}, \text{ etc.};$$

substituant ces valeurs dans la formule de Taylor; nous trouvons

$$\log(x + h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3h^3}, \text{ etc.}$$

59. On pourrait facilement, au moyen de cette formule, trouver la différentielle d'un logarithme, si cette formule n'eût pas été trouvée par la différentiation, mais par un procédé algébrique; en effet, cette formule donne

$$\frac{\log(x + h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \text{etc.};$$

passant à la limite, on a

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x},$$

ou

$$d \log x = \frac{dx}{x}.$$

Connaissant la différentielle d'un logarithme il serait aisé de trouver celle de a^x ; car en faisant $y = a^x$ et en prenant les logarithmes dans le système népérien, on a

$$Ly = La^x \text{ ou } Ly = x La,$$

et en différenciant,

$$\frac{dy}{y} = dx La;$$

d'où l'on tire

$$dy = y dx La = a^x dx La.$$

60. On peut déduire le théorème de Maclaurin de celui de Taylor, de la manière suivante : on a par le théorème de Taylor

$$f(x+h) = fx + \frac{d.fx}{dx} h + \frac{d^2.fx}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3.fx}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} (26)$$

Appelons (fx) ce que devient fx quand on y fait $x=0$, $\left(\frac{d.fx}{dx}\right)$ ce que devient $\frac{d.fx}{dx}$ quand on y fait $x=0$, ainsi de suite pour les autres coefficients différentiels; la formule (26), quand on fera $x=0$ deviendra donc

$$fh = (fx) + \left(\frac{d.fx}{dx}\right) h + \left(\frac{d^2.fx}{dx^2}\right) \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Dans cette équation, h entre dans fh comme x entrait dans fx , de sorte que si on change h en x , fh deviendra fx ; et comme il ne reste plus de traces de x , ce changement est permis puisqu'il importe peu de substituer une lettre ou une autre à h : en faisant donc ce changement on trouve

$$fx = (fx) + \left(\frac{d.fx}{dx}\right) x + \left(\frac{d^2.fx}{dx^2}\right) \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.} \dots (27),$$

ce qui est le théorème de Maclaurin.

De la différentiation des équations à deux variables.

61. Soit

$$F(x, y) = 0 \dots (28),$$

une équation entre deux variables. En résolvant cette

équation par rapport à y , on trouvera $y = \varphi x$; imaginons que l'on ait substitué cette valeur dans l'équation (28), celle-ci deviendra $F(x, \varphi x) = 0$, ou pour plus de simplicité

$$fx = 0 \dots (29),$$

équation identique et dans laquelle tous les termes doivent se détruire, quelque valeur que l'on donne à x . Par exemple, si cette équation ne monte qu'au troisième degré, on pourra la représenter par

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

et en mettant une valeur quelconque pour x , elle sera toujours satisfaite; donc, en mettant $x + h$ à la place de x , on aura encore

$$A(x + h)^3 + B(x + h)^2 + C(x + h) + D = 0,$$

c'est-à-dire, que si l'on a $fx = 0$, quel que soit x , on aura encore $f(x + h) = 0$; retranchant de cette équation celle-ci $fx = 0$, il restera $f(x + h) - fx = 0$; donc aussi

$$\frac{f(x + h) - fx}{h} = 0.$$

Or

$$f(x + h) = fx + Ah + Bh^2 + \text{etc.},$$

d'où l'on tire

$$\frac{f(x + h) - fx}{h} = A + Bh + \text{etc.};$$

le premier membre de cette équation étant nul, on a donc

$A + Bh + \text{etc.} = 0$, et passant à la limite $\frac{d.fx}{dx} = A = 0$, et par conséquent $d.fx = A dx = 0$, ou plutôt, en restituant y , $d.F(x, y) = A dx = 0$.

Ceci nous apprend qu'en regardant y comme une fonc-

tion de x , si l'on différencie l'équation $F(x, y) = 0$, on pourra égaler le résultat à zéro; ce qui servira à déterminer la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

Soit donc

$$F(x, y) = x^2 + 3ay - y^2 = 0, \dots (30);$$

différenciant par les procédés ordinaires, et observant que par la démonstration précédente on doit égaler ce résultat à zéro, on a

$$2x dx + 3a dy - 2y dy = 0 \dots (31);$$

de cette équation on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y - 3a} \dots (32).$$

62. Si l'on compare le procédé qui nous a fait obtenir cette valeur avec celui que nous avons employé jusqu'à présent, on verra qu'en opérant d'après cette première méthode, il aurait fallu d'abord mettre l'équation (28) sous la forme $y = fx$, et par conséquent, résoudre l'équation par rapport à y pour en déduire ensuite par la différentiation la valeur de $\frac{dy}{dx}$. En suivant cette marche nous trouverions d'abord

$$y = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2},$$

et ensuite par la différentiation,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}}.$$

Cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ se présente sous une forme différente

de celle qui nous est offerte par l'équation (32); mais en mettant dans l'équation (32) la valeur de y' cette équation deviendra

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{2x}{2\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}} = \pm \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}}$$

comme nous venons de le trouver. L'équation (31) est la différentielle première de l'équation (30).

Pour obtenir l'équation qui donne le coefficient différentiel du second ordre, c'est-à-dire $\frac{d^2y}{dx^2}$, en divisant l'équation (31) par dx et faisant $\frac{dy}{dx} = p$, cette équation deviendra

$$2x + 3ap - 2yp = 0;$$

regardant y et p comme des fonctions de x , nous aurons en différenciant

$$2dx + 3adp - 2ydp - 2pdy = 0;$$

divisant par dx et mettant p à la place de $\frac{dy}{dx}$, il viendra

$$2 + 3a \frac{dp}{dx} - 2y \frac{dp}{dx} - 2p^2 = 0,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2p^2 - 2}{3a - 2y} \dots (33);$$

Or, puisque $p = \frac{dy}{dx}$, nous aurons $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$; mettant ces valeurs dans l'équation (33), et faisant évanouir les dénominateurs, nous obtiendrons

$$d^2y (3a - 2y) = 2dy^2 - 2dx^2 \dots (34);$$

telle sera la différentielle seconde de l'équation (30).

Pour avoir la différentielle troisième, on fera $\frac{dp}{dx} = q$,

et l'équation (33) deviendra, après avoir fait évanouir le dénominateur,

$$3aq - 2yq = 2p^2 - 2;$$

on différenciera en regardant y, p, q , comme des fonctions de x , et l'on trouvera la différentielle troisième, ainsi de suite.

63. Au lieu d'employer les lettres p, q, r etc. pour effectuer les opérations, on parviendrait au même résultat en différenciant l'équation (31) et en mettant dy pour la différentielle de y , d^2y pour celle de dy , d^3y pour celle de d^2y , etc., et en regardant dx comme constant; on trouverait de cette manière

$$2dx^3 + 3ad^2y - 2dy^2 - 2ydy = 0,$$

équation qui est la même que l'équation (34).

64. Donnons maintenant l'expression générale de la différentielle de l'équation $f(x, y) = 0$. Pour cela représentons $f(x, y)$ par u , nous aurons en différenciant cette fonction par rapport à u , le terme $\frac{du}{dx} dx$, et en la différenciant par rapport à y , nous aurons ce second terme $\frac{du}{dy} dy$; en sorte, que $df(x, y)$ ou $du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$. Mais si y est considéré comme une fonction de x nous aurons en la différenciant

$$dy = \frac{dy}{dx} dx;$$

substituant cette valeur, nous trouverons

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} dx.$$

65. Si l'on se rappelle le théorème démontré ar-

ticle (24), on verra que u étant considéré comme une fonction de y et y comme une fonction de x , le produit $\frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} dx$ n'est autre chose que la différentielle de u prise par rapport à x renfermé dans y .

66. La différentielle totale d'une fonction de x et de y étant donnée par l'équation $du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$, on a nommé les expressions $\frac{du}{dx} dx$, $\frac{du}{dy} dy$ les différentielles partielles de u .

De même, si u est une fonction de trois variables, x, y, z , indépendantes, nous aurons,

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz,$$

et les termes $\frac{du}{dx} dx$, $\frac{du}{dy} dy$, $\frac{du}{dz} dz$, seront les différentielles partielles de u .

67. Nous avons vu (art. 52), qu'une expression telle que $\frac{dy}{dx}$, indiquait que la fonction y avait été différenciée par rapport à la variable x , et divisée ensuite par dx ; il suit de là que si l'on a l'équation $\frac{dy}{dx} = A$, et qu'on tire

$$1 = \frac{A}{\frac{dy}{dx}}$$

on ne peut sans démonstration en conclure que

$$1 = A \frac{dx}{dy};$$

car dans cette nouvelle équation, la différentiation n'est plus faite par rapport à x , mais par rapport à y ; et l'on ne sait pas si dans cette nouvelle hypothèse de différentiation, le résultat est le même.

Pour lever cette difficulté, on a démontré (art. 24) que

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Si dans cette équation on fait $v = x$, elle devient

$$1 = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

ce qui fait voir que le changement d'hypothèse de différentiation s'accorde avec l'algèbre.

De la méthode des tangentes.

68. On appelle ainsi la méthode qui donne les expressions différentielles des tangentes, sous-tangentes, normales et sous-normales. Soient x' et y' les coordonnées d'un point M , fig. 4; pris sur une courbe, augmentons FIG. 4. l'abscisse $AP = x'$ d'une quantité $PP' = h$, menons l'ordonnée $P'M'$, et par les points M et M' faisons passer une sécante $M'S$. Il est certain que plus PP' diminuera, plus PS tendra à se confondre avec la sous-tangente PT , jusqu'à ce qu'enfin $PP' = h$ devienne nul; PT sera donc la limite vers laquelle tendra PS .

Cherchons maintenant l'expression analytique de PS , pour en prendre la limite : les triangles semblables MMQ , MSP donnent la proportion,

$$MQ : MP :: MP : PS,$$

$$\text{ou } MQ : h :: y' : PS;$$

donc

$$PS = \frac{hy}{M'Q}.$$

Pour déterminer $M'Q$, nous avons

$$M'Q = M'P - MP;$$

or,

$$M'P = y' = f(x + h);$$

donc

$$M'P = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

D'une autre part

$$MP = y.$$

Si nous retranchons ces équations l'une de l'autre, il nous viendra

$$M'P - MP \text{ ou } M'Q = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Substituant cette valeur dans celle de PS , nous trouverons

$$PS = \frac{hy}{\frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}},$$

et en divisant les deux termes par h ,

$$PS = \frac{y}{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}}.$$

A la limite $h = 0$, et PS se change en PT , ce qui nous donne $PT = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$, ou (art. 67) $PT = y \frac{dx}{dy}$, ou plutôt

$$PT = y' \frac{dx'}{dy'} = \text{sous-tangente},$$

en représentant par x' et par y' les coordonnées du point M .

FIG. 5. 69. Si à ce point M , fig. 5, nous menons une perpen-

diculaire MN sur MT , la sous-normale sera PN . Pour la déterminer, nous aurons

$$PT : PM :: PM : PN,$$

ou

$$y' \frac{dx'}{dy'} : y' :: y' : PN,$$

donc

$$PN = y' \frac{dy'}{dx'} = \text{sous-normale}.$$

A l'égard de la tangente et de la normale, nous avons

$$MT = \sqrt{TP^2 + PM^2},$$

$$\text{ou tangente} = \sqrt{y'^2 \frac{dx'^2}{dy'^2} + y'^2} = y' \sqrt{\frac{dx'^2}{dy'^2} + 1};$$

$$MN = \sqrt{PN^2 + PM^2},$$

$$\text{ou normale} = \sqrt{y'^2 \frac{dy'^2}{dx'^2} + y'^2} = y' \sqrt{\frac{dy'^2}{dx'^2} + 1}.$$

70. Pour trouver l'équation de la tangente, soient x' et y' , les coordonnées du point de tangence M ; l'équation de la droite MT , qui passe par le point M , pourra donc être représentée par

$$y - y' = A(x - x').$$

Dans cette équation, A étant la tangente trigonométrique de l'angle MTP , cette tangente trigonométrique aura pour expression $\frac{PM}{PT}$; car on a

$$PT : PM :: 1 : \text{tang. } MTP = \frac{PM}{PT};$$

$$\text{Donc tang. } MTP = \frac{PM}{PT} = \frac{y'}{\text{sous-tang.}} = \frac{y'}{y' \frac{dx'}{dy'}};$$

substituant cette valeur de A dans l'équation de la tangente, cette équation devient

$$y - y' = \frac{dy'}{dx}(x - x'), \text{ équation de la tangente.}$$

Celle de la normale sera donc $y - y' = -\frac{dx'}{dy}(x - x')$.

Application des Formules précédentes à des exemples.

71. 1°. Trouver la sous-tangente de la parabole.

L'équation de la parabole étant $y^2 = px$, on en tirera en la différenciant

$$2y dy = p dx,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}.$$

Or x' et y' étant les coordonnées du point de tangence, il faudra donc, pour avoir le coefficient différentiel qui correspond à ce point, accentuer x et y ; ainsi nous aurons

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{p}{2y'};$$

substituant cette valeur dans celle de PT , nous obtiendrons

$$PT = \frac{2y'^2}{p},$$

et en mettant px' à la place de y'^2 , cette équation deviendra

$$PT \text{ ou sous-tangente} = 2x'.$$

2°. Trouver la sous-normale de l'ellipse.

L'équation $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ de l'ellipse rapportée au centre étant différenciée, donne

$$2b^2x dx + 2a^2y dy = 0,$$

d'où l'on tire $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x'}{y'}$;

mettant cette valeur dans celle de la sous-normale PN on obtient

$$PN \text{ ou sous-normale} = -\frac{b^2}{a^2} x'.$$

3°. Trouver l'expression de la tangente au cercle.

L'équation $x^2 + y^2 = r^2$, qui est celle du cercle, étant différenciée, on trouve, pour le point de tangence x', y' ,

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{x'}{y'}.$$

Au moyen de cette valeur, on réduira l'expression de MT à

$$\begin{aligned} \text{tangente} &= y' \sqrt{\frac{y'^2}{x'^2} + 1} = y' \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{x'^2}} = y' \sqrt{\frac{r^2}{x'^2}} \\ &= \frac{ry'}{x'}. \end{aligned}$$

Des Asymptotes des Courbes.

72. L'expression AT , fig. 6, de la distance du sommet de la FIG. 6. courbe, au point de tangence, se déduit facilement de l'équation de la tangente; car si le sommet A de la courbe est pris pour origine, la droite AT sera la distance de ce sommet, au point où l'ordonnée MP sera nulle.

L'équation de la tangente MT étant $y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x')$, il suffira donc de faire $y = 0$ dans cette équation, pour que la valeur de x qu'on en déduira soit celle de AT ; nous obtiendrons de cette manière

$$AT = x' - y' \frac{dx'}{dy'}$$

Telle sera la distance de l'origine, au point où la tangente coupe l'axe des x . Pour connaître la distance de l'origine, au point où

tangente coupe l'axe des y , il faudra calculer AB . Or AB étant l'ordonnée y qui correspond à $x = 0$ dans l'équation de la tangente, nous aurons dans cette hypothèse

$$AB = y' - \frac{dy'}{dx} x'.$$

Supposons maintenant que x' devenant infini, les valeurs de AT et de AB , fig. 7, conservent des valeurs finies, on en conclura que la droite TB ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie, donc TB sera une asymptote à la courbe.

73. Prenons pour exemple l'équation $y^3 = mx + nx^2$, on tirera de cette équation

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{m + 2nx'}{2y'};$$

donc

$$AT = x' - \frac{2y'^2}{m + 2nx'} = \frac{mx' + 2nx'^2 - 2y'^2}{m + 2nx'} = -\frac{mx'}{m + 2nx'},$$

$$AB = y' - \frac{mx' + 2nx'^2}{2y'} = \frac{2y'^2 - mx' - 2nx'^2}{2y'};$$

mettant pour y' sa valeur, et réduisant, on trouve

$$AT = \frac{mx'}{m + 2nx'}, \quad AB = \frac{mx'}{2\sqrt{mx' + nx'^2}};$$

divisant les deux termes de ces fractions par x' , on obtiendra

$$AT = -\frac{m}{\frac{m}{x'} + 2n}, \quad AB = \frac{m}{2\sqrt{\frac{m}{x'} + n}}.$$

Lorsqu'on fait $x' = \infty$, ces valeurs se réduisent à

$$AT = -\frac{m}{2n}, \quad AB = \frac{m}{2\sqrt{n}} \dots (35);$$

donc la courbe sera insensible d'asymptotes, pourvu, cependant, que n ne soit ni négatif, ni nul; car si n était négatif, la valeur de AB donnée par la seconde des équations (35), deviendrait imaginaire; or dans le cas où n est négatif, l'équation appartient à une ellipse. Cette même équation serait celle d'une parabole si n avait pour valeur zéro; mais dans cette hypothèse, les équations (35) nous montrent que AT et AB deviennent infinis, ce qui prouve que la parabole ne peut pas avoir d'asymptotes.

De l'équation du plan tangent à une surface courbe, et de celle de la normale à cette surface.

74. Soient $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface courbe, et $Ax + By + Cz + D = 0$ celle d'un plan. Si le point de tangence *M* a pour coordonnées x', y', z' , ces coordonnées devront satisfaire à l'équation du plan, et l'on aura par conséquent

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Éliminant D entre cette équation et la précédente, on trouvera pour l'équation du plan assujéti à passer par le point x', y', z' ,

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0. \dots (36).$$

Menons par le point de tangence x', y', z' un plan parallèle au plan des x, z ; ce plan coupera la surface suivant une courbe *MC*, fig. 8, et le plan tangent suivant une droite *ML*; cette droite *ML* devra être tangente à la courbe *MC*, autrement le plan tangent couperait la surface courbe.

L'équation de la droite *ML* peut se déduire de l'équation (36); car cette droite *ML* étant l'intersection du plan tangent par un plan parallèle au plan des x, z , a dans tous ses points des valeurs égales pour y ; et comme le point *M* est sur cette droite, on a donc $y = y'$ ou $y - y' = 0$. Ce qui réduit l'équation (36) à

$$A(x - x') + C(z - z') = 0.$$

Cette équation exprimera donc la relation qui existe entre les coordonnées z et x d'un point quelconque pris sur la droite *ML*, et par conséquent sera l'équation de cette droite. On peut l'écrire ainsi :

$$z - z' = -\frac{A}{C}(x - x') \dots (37).$$

D'une autre part l'équation de la courbe *MC* s'obtiendra de même en regardant y comme constant dans l'équation de la surface courbe $f(x, y, z) = 0$.

Si l'on veut exprimer maintenant la condition que la droite *ML* soit tangente à la courbe *MC*, il faut donc (art. 70) que le coefficient

de $(x-x')$ de l'équation (37) soit égal à la valeur de $\frac{dz'}{dx'}$ tirée de l'équation de la courbe MC .

Or, l'équation de cette courbe étant celle de la surface dans laquelle on ferait y constant, il suffit de différencier l'équation de cette surface, et d'en tirer $\frac{dz}{dx}$; car, d'après (l'art. 52), la notation $\frac{dz}{dx}$ suppose qu'on a regardé y comme constant dans la différentiation.

Il suit de là qu'en accentuant z' et x' après avoir opéré, on a pour la condition que ML soit tangente à MC

$$-\frac{A}{C} = \frac{dz'}{dx'}, \text{ ou plutôt } A = -C \frac{dz'}{dx'} \dots (38).$$

Si l'on mène ensuite par le point M un plan parallèle au plan des z, y , ce plan coupera la surface suivant une courbe MD et le plan tangent suivant une droite MN .

On démontrerait comme précédemment que cette droite MN doit être tangente à la courbe d'intersection MD , et que pour tous les points de cette droite MN les abscisses étant égales, on doit avoir $x-x' = 0$, ce qui réduit l'équation (36) à

$$B(y-y') + C(z-z') = 0,$$

D'où l'on tirera

$$z-z' = -\frac{C}{B}(y-y').$$

Cette équation étant celle de la droite MN , on exprimera la condition que cette droite est tangente à la courbe MD , en égalant le coefficient de $y-y'$ au coefficient différentiel $\frac{dz'}{dy'}$ tiré de l'équation de la surface, et l'on aura

$$-\frac{B}{C} = \frac{dz'}{dy'}$$

et par conséquent

$$B = -C \frac{dz'}{dy'} \dots (39).$$

Si l'on substitue dans l'équation (36) les valeurs de A et de B données par les équations (38) et (39), on trouvera

$$-C \frac{dz'}{dx'}(x-x') - C \frac{dz'}{dy'}(y-y') + C(z-z') = 0,$$

d'où l'on tire pour l'équation du plan tangent, au point x', y', z' ,

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y') \dots (40).$$

75. Cherchons, par exemple, l'équation d'un plan tangent à la sphère. Les coordonnées du centre étant a, b, c , la sphère aura pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2;$$

on trouve en différenciant

$$(x - a) dx + (y - b) dy + (z - c) dz = 0,$$

d'où l'on déduit d'après la notation convenue (art. 52)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a - x}{z - c}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{b - y}{z - c};$$

Donc l'équation du plan tangent à la sphère au point dont les coordonnées sont x', y', z' , sera

$$z - z' = \frac{a - x'}{z' - c}(x - x') + \frac{b - y'}{z' - c}(y - y').$$

76. Si ce plan passait à l'extrémité du diamètre vertical, on aurait

$$x' = a, y' = b, z' = c + r.$$

Ces valeurs réduiraient les équations du plan tangent à $z = c + r$, ce qui est l'équation d'un plan parallèle au plan des x, y .

77. Les équations de la normale au point x', y', z' peuvent se déduire facilement de l'équation du plan tangent. En effet, par la géométrie analytique (voyez ma *Théorie des Courbes du second ordre*, pag. 278), on sait que si l'on a les équations

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (41),$$

$$\left. \begin{array}{l} x = ax + a \\ y = by + b \end{array} \right\} \dots (42),$$

la première étant celle d'un plan, et les deux autres celles d'une ligne droite, les conditions nécessaires pour que cette droite soit perpendiculaire au plan sont, qu'on ait

$$A = aC, B = bC.$$

Si l'on compare l'équation (40) du plan tangent à l'équation (41), on trouvera, en égalant entr'eux les coefficients de x , de y et de z ,

$$A = -\frac{dz'}{dx'}, B = -\frac{dz'}{dy'}, C = 1.$$

donc

$$a = -\frac{dz'}{dx}, \quad b = -\frac{dz'}{dy};$$

substituant ces valeurs dans les équations (42), on obtient

$$x = -\frac{dz'}{dx}z + a, \quad y = -\frac{dz'}{dy}z + c.$$

Le point x', y', z' devant satisfaire à ces équations puisqu'elles appartiennent à un point de la droite, on a encore

$$x' = -\frac{dz'}{dx}z' + a, \quad y' = -\frac{dz'}{dy}z' + c,$$

éliminant a et c entre ces quatre dernières équations, on trouvera pour les équations de la normale, au point x', y', z' ,

$$x - x' = -\frac{dz'}{dx}(z - z'), \quad y - y' = -\frac{dz'}{dy}(z - z').$$

Des Fonctions qui, pour une valeur de la variable, deviennent $\frac{0}{0}$.

78. Lorsqu'une fraction telle que $\frac{Fx}{\varphi x}$ devient $\frac{0}{0}$ en y substituant une valeur de x que je représenterai par a , c'est un indice que les deux termes de cette fraction ont $x - a$, ou, en général, $(x - a)^m$ pour facteur commun; si l'on pouvait faire évanouir ce facteur commun, on aurait la vraie valeur de la fraction.

Supposons donc que $x - a$ soit m fois facteur dans Fx , et n fois facteur dans φx (sauf, si le cas l'exige, à supposer que m et n soient égaux à l'unité ou à zéro) nous pourrions écrire

$$Fx = P(x - a)^m, \\ \varphi x = Q(x - a)^n.$$

Par la différentiation, nous trouverons

$$\frac{d.Fx}{dx} = \frac{dP}{dx}(x - a)^m + mP(x - a)^{m-1}.$$

Remarquons que cette valeur de $\frac{d.Fx}{dx}$ se compose de deux ter-

mes, dont l'un contient une puissance de $x-a$, moindre d'une unité que celle qui entre dans la fonction. Par la même raison, en prenant le coefficient différentiel de $\frac{d.Fx}{dx}$, on trouvera un terme

affecté de $(x-a)^m$, un autre de $(x-a)^{m-1}$, et un troisième de $(x-a)^{m-2}$; ce dernier terme sera $m(m-1)P(x-a)^{m-2}$.

En continuant ainsi, on verra que chaque nouvelle différentiation reproduit des termes affectés des mêmes puissances de $(x-a)$, que celles qui étaient renfermées dans la fonction différenciée, plus un terme dans lequel la puissance de $x-a$ est diminuée d'une unité; ainsi, en prenant les coefficients différentiels successifs, le terme qui contient la moins haute puissance de $x-a$ sera

à la première différentiation. . . $mP(x-a)^{m-1}$,

à la seconde. $m(m-1)P(x-a)^{m-2}$,

à la troisième. $m(m-1)(m-2)P(x-a)^{m-3}$,

à la n^e $m(m-1) \dots P(x-a)^{m-n}$.

De sorte que le coefficient différentiel de l'ordre r de Fx , sera de cette forme,

$$\frac{d^r Fx}{dx^r} = X(x-a)^m + X'(x-a)^{m-1} + X''(x-a)^{m-2} \\ + X'''(x-a)^{m-3} \dots + m(m-1)(m-2) \dots P(x-a)^{m-r}.$$

Ce que nous disons de Fx pouvant s'appliquer à φx , nous trouverons pour la différentielle de l'ordre r de la fraction proposée, un résultat de cette forme,

$$\frac{d^r Fx}{dx^r} = \frac{X(x-a)^m + X'(x-a)^{m-1} + m(m-1) \dots P(x-a)^{m-r}}{d^r \varphi x} = \frac{Z(x-a)^n + Z'(x-a)^{n-1} \dots + n(n-1) \dots Q(x-a)^{n-r}}{dx^r} \quad (43).$$

79. Cela posé, considérons trois cas,

1°. $m = n$, 2°. $m > n$, 3°. $m < n$.

Si $m = n$, et que le nombre r de différentiations effectuées soit égal à m , les binômes $(x-a)^{m-r}$ et $(x-a)^{n-r}$ se réduisent chacun à $(x-a)^0$, c'est-à-dire, à l'unité; à l'égard des autres binômes $(x-a)^m$, $(x-a)^{m-1}$, etc., $(x-a)^n$, $(x-a)^{n-1}$, etc., ils sont nuls dans l'hypothèse de $x = a$: ainsi, tous les termes, lors

le dernier du numérateur et le dernier du dénominateur, s'évanouissent, et l'équation (43) se réduit à

$$\frac{\frac{d^m Fx}{dx^m}}{\frac{d^m \varphi x}{dx^m}} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots P}{n(n-1)(n-2) \dots Q} = \frac{P}{Q}$$

Dans le second cas qui est celui où l'on a $m > n$, si le nombre r de différentiations effectuées est égal à n , le binôme $(x-a)^{n-r}$ se réduit à l'unité parce que son exposant $n-r$ est nul. Les exposants $n-1$, $n-2$, etc., $m-1$, $m-2$, etc., des autres binômes, étant plus grands que $n-r$ surpassent l'unité; par conséquent, ces binômes se réduisent chacun à zéro lorsqu'on fait $x = a$; tous les termes s'évanouissent donc, dans cette hypothèse, hors celui où entre $(x-a)^{n-r}$, et l'équation (43) se réduit à

$$\frac{\frac{d^m Fx}{dx^m}}{\frac{d^m \varphi x}{dx^m}} = \frac{0 \dots 0}{n(n-1) \dots Q (x-a)^{n-r}} = \frac{0 \dots 0}{n(n-1) \dots Q} = 0.$$

Enfin, dans le cas où l'on a $m < n$, le nombre r de différentiations exécutées étant pris égal à m , tous les termes s'évanouissent, hors le terme $m(m-1) \dots P (x-a)^0$, et il reste

$$\frac{\frac{d^m Fx}{dx^m}}{\frac{d^m \varphi x}{dx^m}} = \frac{m(m-1) \dots P}{0} = \infty.$$

80. De ce qui précède, il résulte cette règle : lorsqu'on veut déterminer la vraie valeur d'une fraction $\frac{Fx}{\varphi x}$ qui devient $\frac{0}{0}$ par une valeur donnée à la variable, on différenciera, séparément, les deux termes de cette fraction, et ensuite on examinera si les résultats $\frac{d.Fx}{dx}$ et $\frac{d.\varphi x}{dx}$ se réduisent aussi à zéro par la valeur hypothétique de la variable; si cela est, on prendra les coefficients différentiels des expressions $\frac{d.Fx}{dx}$ et $\frac{d.\varphi x}{dx}$, et l'on verra si dans la même hypothèse de la variable, ces coefficients différentiels se réduisent chacun à zéro; en continuant ainsi cette vérification, si l'on trouve

après un certain nombre de différentiations que les deux termes de la fraction ne s'évanouissent pas par la valeur donnée à la variable, cette dernière fraction sera la vraie valeur de $\frac{Fx}{\varphi x}$; mais si le numérateur seulement devient 0 par la valeur de x , l'expression $\frac{Fx}{\varphi x}$ sera nulle; enfin, si ce n'est que le dénominateur qui s'évanouit par la valeur de x , l'expression $\frac{Fx}{\varphi x}$ sera infinie.

81. Prenons pour exemple la fraction

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{x^3 - b^3}{4x - 4b},$$

cette fraction devenant $\frac{0}{0}$, lorsque $x = b$, si nous voulons en avoir la vraie valeur, nous différencierons ses deux termes et nous obtiendrons $\frac{3x^2}{4}$; et comme les deux termes de cette fraction ne deviennent pas nuls dans l'hypothèse de $x = b$, la vraie valeur de la fraction proposée lorsque $x = b$, est donc $\frac{3b^2}{4}$.

82. Nous prendrons encore pour exemple la fraction

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3};$$

cette fraction se réduisant à $\frac{0}{0}$, lorsque $x = 1$, nous différencierons ses deux termes pour en obtenir la valeur, et nous trouverons

$$\frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 12x + 8},$$

les deux termes de cette fraction étant encore nuls dans l'hypothèse de $x = 1$, nous différencierons encore et nous obtiendrons

$$\frac{6x}{12x^2 - 12};$$

le dénominateur seul se réduit à zéro lorsque l'on fait $x = 1$; donc la fonction proposée, dans l'hypothèse de $x = 1$, est infinie.

83. Si l'on appliquait la même règle à la fraction

$$\frac{a^x - b^x}{x}$$

qui devient $\frac{0}{0}$ dans l'hypothèse de $x = 0$, on trouverait en différenciant les deux termes de cette fraction,

$$\frac{a^x \log a - b^x \log b}{1},$$

expression dont le numérateur ne devient pas nul lorsque $x = 0$, et qui, par conséquent, donne $\log a - \log b$ pour la valeur que prend la fonction proposée, lorsque $x = 0$.

Il est bien évident que le facteur commun aux deux termes de la fraction proposée est $x - 0$, c'est-à-dire x ; mais comment reconnaître ce facteur dans $a^x - b^x$? Pour y parvenir, nous remarquerons que, d'après l'art. (37),

$$a^x = 1 + A \frac{x}{1} + \frac{A^2 x^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.},$$

$$b^x = 1 + B \frac{x}{1} + \frac{B^2 x^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.};$$

donc en prenant la différence

$$a^x - b^x = (A - B)x + \frac{(A^2 - B^2)x^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.},$$

et l'on voit que x est facteur commun de $a^x - b^x$.

84. Il ne faut pas, cependant, croire que la règle que nous venons de donner suffise pour tous les cas : la démonstration précédente est fondée sur ce que les exposants m et n sont des nombres entiers ; mais s'ils étaient fractionnaires, on ne pourrait obtenir par des différentiations successives un terme où $x - a$ se trouvât élevé à la puissance 0 ; par conséquent, on ne pourrait, par le procédé que nous avons employé, dégager la fraction du facteur commun.

Soit donc, pour plus de généralité, l'expression

$$\frac{F x}{\varphi x} = \frac{P(x-a)^\alpha + Q(x-a)^\zeta + R(x-a)^\gamma + \text{etc.}}{P'(x-a)^{\alpha'} + Q'(x-a)^{\zeta'} + R'(x-a)^{\gamma'} + \text{etc.}},$$

dans laquelle α, ζ, γ , etc., sont des fractions croissantes ainsi que α', ζ', γ' , etc. Cette expression se réduisant à $\frac{0}{0}$ lorsque $x = a$, nous pourrions, au lieu de changer x en a , changer x en $a + h$,

en nous réservant de faire $h=0$, après avoir réduit; alors l'hypothèse sera la même que si nous eussions fait immédiatement $x=a$, et nous aurons

$$\frac{Fx}{qx} = \frac{Ph^a + Qh^c + Rh^\gamma + \text{etc.}}{P'h^{a'} + Q'h^{c'} + R'h^{\gamma'} + \text{etc.}} \dots (44).$$

En considérant a et a' , qui sont les plus petits exposans dans chacune de ces suites, il peut arriver trois cas,

$$1^\circ. a > a'; \quad 2^\circ. a = a'; \quad 3^\circ. a < a'.$$

Dans le premier cas, en divisant par $h^{a'}$ les deux termes de la fraction (44), on a

$$\frac{Fx}{qx} = \frac{Ph^{a-a'} + Qh^{c-a'} + Rh^{\gamma-a'} + \text{etc.}}{P' + Q'h^{c'-a'} + R'h^{\gamma'-a'} + \text{etc.}} \dots (45);$$

par hypothèse, a surpasse a' , par conséquent le nombre $a-a'$ sera positif; à plus forte raison $c-a'$, etc., $\gamma-a'$ le sont aussi, puisque a, c, γ , etc., vont en augmentant; $c'-a'$, $\gamma'-a'$, etc., seront aussi des quantités positives, par la raison que les expressions a', c', γ' , etc., allant en croissant, a' est moindre que c' , que γ' , etc. Cela posé, si l'on fait $h=0$, tous les termes du second membre de l'équation (45) s'évanouissent, hors P' ; donc cette équation se réduit alors à

$$\frac{Fx}{qx} = \frac{0}{P'} = 0.$$

Dans le second cas où $a=a'$, le terme $Ph^{a-a'}$ se réduit à $Ph^0=P$, donc d'après l'inspection de l'équation (45), on voit que, lorsque $x=a$, $\frac{Fx}{qx}$ se réduit à $\frac{P}{P'}$.

Enfin, dans le troisième cas où l'on a $a < a'$, en divisant par h^a , on écrira ainsi l'équation (44) :

$$\frac{Fx}{qx} = \frac{P + Qh^{c-a} + Rh^{\gamma-a} + \text{etc.}}{P'h^{a'-a} + Q'h^{c'-a} + R'h^{\gamma'-a} + \text{etc.}};$$

et l'on voit que l'hypothèse de $h=0$ réduit cette équation à

$$\frac{Fx}{qx} = \frac{P}{0} = \infty.$$

85. Prenons pour exemple la fraction

$$\frac{(x^2 - 3ax + 2a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^3 - a^3)^{\frac{1}{2}}},$$

qui, lorsque $x = a$, se réduit à $\frac{0}{0}$. Si dans cette fraction on met $a + h$ à la place de x , elle devient

$$\begin{aligned} \frac{(h^2 - ah)^{\frac{3}{2}}}{(3a^2h + 3ah^2 + h^3)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{(h-a)^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}}}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(h-a)^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(h-a)^{\frac{3}{2}} h^1}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

faisant $h = 0$, on obtient

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{0}{(3a^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Ce procédé peut s'appliquer à tous les cas.

86. Si une valeur de x rendait infinis les deux termes de la fraction $\frac{Fx}{\varphi x}$, on diviserait ces deux termes par $Fx \times \varphi x$, et l'on aurait

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{\frac{1}{\varphi x}}{\frac{1}{Fx}} = \frac{1}{\frac{\varphi x}{Fx}}.$$

87. Enfin, si l'on avait un produit MN dans lequel l'hypothèse de $x = 0$ rendit l'un des facteurs nul et l'autre infini; soit M , le facteur qui devient nul par la valeur de x , qui rend N infini; on écrirait ainsi ce produit:

$$MN = \frac{M}{\frac{1}{N}}.$$

Et comme alors $\frac{1}{N}$ serait 0, l'expression $\frac{M}{\frac{1}{N}}$ se réduirait à $\frac{0}{0}$.

Des maxima et minima, dans les fonctions d'une seule variable.

88. On peut, dans la série de Taylor, donner une valeur à l'accroissement h , telle que l'un des termes de la série devienne plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent. En effet, cette série étant représentée par

$$y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

si l'on veut que $\frac{dy}{dx} h$, par exemple, devienne plus grand que la somme de tous les autres termes, écrivons ainsi la partie de la série comprise depuis ce terme :

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^2}{2.3} + \text{etc.} \right) h \dots (46).$$

Or, quand on fait $h = 0$, la partie $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^2}{2.3} \text{ etc.}$ s'anéantissant, on conçoit qu'elle peut être rendue aussi petite qu'on voudra, lorsqu'on prendra h très-près de zéro ; et être alors surpassée par $\frac{dy}{dx}$, qui est indépendant de h . Soit donc Z , ce que devient dans ce cas $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}$

La série (46) se réduit à $\left(\frac{dy}{dx} + Z \right) h$; et comme alors on a $\frac{dy}{dx} > Z$, ou $\frac{dy}{dx} h > h Z$, en multipliant par h , il en résulte que le terme $\frac{dy}{dx} h$ est plus grand que la somme de tous les suivans. On démontrerait la même chose pour tout autre terme à l'égard de ceux qui le suivent.

89. Soit $y = \varphi x$, une équation entre deux variables.

On peut toujours considérer cette équation comme celle d'une courbe dont les différentes valeurs de la fonction y seraient les ordonnées ; on dit que cette fonction y est à son maximum, lorsqu'après avoir diminué successivement, elle est sur le point de recommencer à croître.

FIG. 9. Soit, par exemple, la courbe MBN , fig. 9, qui a pour équation $y = b + cx^2$; on voit que les ordonnées mp , $n'p'$, etc. vont en diminuant jusqu'au point B ; mais que depuis ce point, les ordonnées qn , $q'n'$, etc. vont toujours en croissant : ainsi l'ordonnée AB est le minimum de la fonction y .

90. On dit de même qu'une fonction y est parvenue à son maximum, lorsqu'après s'être accrue successivement, elle est arrivée au point passé lequel elle commence à décroître.

FIG. 10. La courbe CDE , fig. 10, dont l'équation est $y = b - cx^2$, nous présente un exemple de ce cas, au point D , puisque les ordonnées qui suivent et précèdent immédiatement AD , sont plus petites que AD : cette ordonnée AD est donc un maximum.

91. Il y a des courbes qui n'ont qu'un maximum, d'autres qu'un minimum ; quelques-unes ont l'un et l'autre ; d'autres n'en sont pas susceptibles.

FIG. 9. On voit, par exemple, que la courbe MBN , fig. 9, dont l'équation est $y = b + cx^2$, ne peut avoir un maximum, puisque, d'après la nature de son équation, les ordonnées vont toujours en croissant.

FIG. 11. Le cercle CBD , fig. 11, dont l'équation est

$$a^2 = (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2,$$

a un maximum et un minimum, qui correspondent à la

même abscisse AP : le maximum est PD , et le minimum est BP .

92. Lorsqu'une fonction y d'une variable x , a un maximum ou un minimum, ce maximum ou ce minimum serait déterminé, si l'on connaissait l'abscisse qui y correspond : par exemple, si dans une courbe dont l'équation est $y = \varphi x$, on connaissait la valeur a de l'abscisse x , qui correspond au maximum ou au minimum, il suffirait de faire $x = a$, dans l'équation $y = \varphi x$, pour déterminer la valeur de y , qui est le maximum ou le minimum demandé.

93. Soit donc $y = f x$, une ordonnée PM , fig. 12, FIG. 12. qui est parvenue à son maximum ; si l'abscisse AP reçoit un accroissement h représenté par PP' , et qu'on porte aussi h de P en P'' , on aura pour les conditions, que PM soit un maximum,

$$\begin{aligned} P'M < PM, & \quad P'M'' < PM \\ \text{ou } f(x+h) < f x, & \quad f(x-h) < f x. \end{aligned}$$

Si au contraire PM , fig. 13, est un minimum, en repré- FIG. 13. sentant la valeur de x , qui correspond au minimum par AP , et en prenant $PP' = PP'' = h$, nous aurons pour les conditions du minimum,

$$\begin{aligned} P'M > PM, & \quad P'M'' > PM. \\ \text{ou } f(x+h) > f x, & \quad f(x-h) > f x. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $f(x+h)$ et $f(x-h)$, seront en même temps plus petits que $f x$, il y aura un maximum, et si ces deux fonctions sont en même temps plus grandes que $f x$, il y aura un minimum ; enfin, si l'une de ces fonctions est plus grande et l'autre moindre que $f x$, il n'y aura ni maximum ni minimum.

94. Cherchons donc dans quel cas ces conditions peu-

vent être remplies : pour cet effet, nous avons par le théorème de Taylor,

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} (47).$$

D'une autre part, si dans cette formule on change h en $-h$, on trouve,

$$f(x-h) = y - \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} (48).$$

Pour que $y = fx$ soit un maximum ou un minimum, il faut donc que ces deux développemens soient tous deux plus grands ou tous deux moindres que y ; or, cela ne peut être qu'à moins que $\frac{dy}{dx}$ ne soit nul. En effet, si l'on donne une valeur très-petite à h , on pourra toujours faire en sorte que $\frac{dy}{dx} h$ surpasse la somme algébrique de tous les termes qui le suivent; dans ce cas, le signe qui affectera $\frac{dy}{dx} h$, sera le même que celui de $\frac{dy}{dx} h$, joint aux termes qui le suivent : ainsi, dans cette hypothèse, si $\frac{dy}{dx} h$ est positif dans l'un des développemens (47) et (48), ce développement sera plus grand que y , et sera moindre que y , si $\frac{dy}{dx} h$ est négatif. Le signe qui affecte $\frac{dy}{dx} h$ étant contraire dans ces développemens, il faut que si $\frac{dy}{dx} h$ est positif dans l'un, il soit négatif dans l'autre; d'où il suit que l'une des quantités $f(x+h)$ et $f(x-h)$, sera plus grande que fx , et que l'autre sera moindre que fx .

Si $\frac{dy}{dx} h$ n'est pas nul, il ne pourra donc y avoir de maxi-

num ni de minimum; mais si $\frac{dy}{dx} = 0$, alors les développemens (47) et (48) se réduisent à

$$f(x+h) = y + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

$$f(x-h) = y + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

Dans ce cas, le signe des termes qui suivent y dépendra de $\frac{d^2y}{dx^2}$, si l'on prend h assez petit pour que ce terme surpasse la somme de tous ceux qui le suivent; et comme $\frac{d^2y}{dx^2}$ a le même signe dans les deux développemens, il en résultera que si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif, les deux fonctions de $(x+h)$ et de $(x-h)$ seront plus grandes que fx ; dans ce cas, fx sera un minimum. De même, si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif, on voit que fx sera un maximum.

95. Pour compléter cette théorie, nous remarquerons que outre $\frac{dy}{dx} = 0$, on peut avoir encore $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; dans ce cas, il ne peut y avoir maximum ou minimum, que lorsque $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Alors le signe des quantités qui suivent y dépendra de $\frac{d^4y}{dx^4}$, quand on prendra h très-petit; et l'on prouvera que si $\frac{d^4y}{dx^4}$ est positif, fx est un minimum, et que si $\frac{d^4y}{dx^4}$ est négatif, fx est un maximum; ainsi de suite.

En général, lorsque le premier coefficient qui ne s'évanouit pas, est d'ordre pair, il y a un minimum s'il est positif, et un maximum s'il est négatif.

96. Pour premier exemple, prenons la fonction $y = a - bx + x^2$; nous aurons donc

$$y = a - bx + x^2;$$

différenciant et divisant par dx , nous obtiendrons

$$\frac{dy}{dx} = -b + 2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2.$$

Cette valeur positive de $\frac{d^2y}{dx^2}$ nous apprend que la fonction a un minimum. Pour déterminer l'abscisse qui correspond à ce minimum, nous égalons à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ce qui nous donnera $x = \frac{b}{2}$; si l'on substitue cette valeur de x dans celle de y , on trouvera $y = a - \frac{b^2}{4}$ pour le minimum cherché.

97. Soit encore la fonction $y = a^4 + b^3x - c^2x^2$; différenciant l'équation $y = a^4 + b^3x - c^2x^2$, et divisant par dx , nous trouverons,

$$\frac{dy}{dx} = b^3 - 2c^2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2c^2.$$

Par la valeur négative de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on voit qu'il y a un maximum dans la fonction; l'équation $b^3 - 2c^2x = 0$ nous donne $x = \frac{b^3}{2c^2}$ pour l'abscisse qui correspond à ce maximum, et en substituant cette valeur de x dans celle de y , on trouvera

$$y = a^4 + \frac{b^6}{4c^2}.$$

98. Soit encore l'équation

$$y = 3a^2x^3 - b^4x + c^5,$$

nous trouverons, en opérant comme ci-dessus,

$$\frac{dy}{dx} = 9a^2x^2 - b^4, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 18a^2x;$$

égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, nous avons

$$9a^2x^2 - b^2 = 0, \text{ d'où } x = \pm \frac{b}{3a};$$

ces deux valeurs de x étant mises successivement dans celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, nous apprennent qu'il y a dans la fonction un minimum et un maximum. Le minimum correspond à l'abscisse $x = + \frac{b}{3a}$, et le maximum à l'abscisse $x = - \frac{b}{3a}$; en mettant ces valeurs dans celle de y , nous trouverons $y = c^5 - \frac{2b^6}{9a}$, pour le minimum, et $y = c^5 + \frac{2b^6}{9a}$, pour le maximum.

Application de la théorie des maxima et minima à la solution des divers problèmes.

PROBLÈME I.

99. *Partager un nombre en deux parties; telles que le produit de l'une par l'autre soit le plus grand possible.*

Soit a ce nombre, et x l'une des parties; l'autre sera $a - x$. Donc $x(a - x)$ est la quantité, dont on veut chercher le maximum: différenciant et divisant par dx , l'équation $y = x(a - x) = ax - x^2$, nous trouverons

$$\frac{dy}{dx} = a - 2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2.$$

La valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ nous montre que la fonction renferme effectivement un maximum. Si ce coefficient se fût trouvé d'un signe contraire, le problème aurait été impossible.

En égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, nous trouverons $x = \frac{1}{2}a$, ce qui nous annonce qu'il faut que le nombre a soit partagé en deux parties égales, pour que le produit soit un maximum.

PROBLÈME II.

100. *Entre tous les cylindres inscrits dans un cône droit, déterminer celui qui a le plus grand volume.*

FIG. 14. Soit a , fig. 14, la hauteur SC du cône, b le rayon AC de sa base, et x , la distance SD du sommet, au centre du cercle supérieur du cylindre.

Les triangles semblables SAC , SED , nous donneront

$$SC : AC :: SD : ED,$$

ou

$$a : b :: x : ED,$$

donc

$$ED = \frac{bx}{a}.$$

Soit $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence; on sait que le cercle, dont le rayon est r a pour surface πr^2 . Donc le cercle EGF , qui a $\frac{bx}{a}$ pour rayon, a pour surface $\frac{\pi b^2}{a^2} x^2$; multipliant cette surface par la hauteur DC du cylindre, c'est-à-dire, par $a - x$, nous aurons $\frac{\pi b^2}{a^2} x^2 (a - x)$ pour le volume du cylindre; ainsi l'équation à différencier est

$$y = \frac{\pi b^2}{a^2} (ax^2 - x^3);$$

on déduit de cette équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi b^2}{a^2} (2ax - 3x^2) \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi b^2}{a^2} (2a - 6x);$$

égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on a

$\frac{\pi b^2}{a^2} (2ax - 3x^2) = 0$, ou plutôt $2ax - 3x^2 = 0$,
équation qui est le produit des facteurs x et $2a - 3x$, et
donne par conséquent $x = 0$, ou $x = \frac{2a}{3}$; la valeur $x = 0$,
ne peut correspondre à un maximum, puisque dans cette
hypothèse $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit à $\frac{2\pi b^2}{a}$, nombre positif. Cette va-
leur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, indique un minimum; et en effet, quand
 $x = 0$, le cylindre se réduit à l'axe du cône, (car plus
le cylindre est haut plus il est mince).

La valeur $x = \frac{2a}{3}$, est donc la seule qui puisse répon-
dre à la question; et dans cette hypothèse, $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit
à $-\frac{2\pi b^2}{a}$, nombre négatif. Il résulte de ce qui précède,
que le plus grand cylindre circonscrit au cône, a pour
hauteur les $\frac{2}{3}$ de celle du cône.

PROBLÈME III.

101. Partager une droite AB (fig. 15), en deux parties FIG. 15.
 AC et CB , de manière que le produit $AC^3 \times CB$, soit
un maximum.

Représentons par a cette droite AB , et par x la partie
 CB de cette droite, l'équation du problème sera donc

$$y = x^3 (a - x),$$

d'où l'on tire,

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 - 4x^3, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6ax - 12x;$$

en égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on trouve $x = 0$, ou
 $x = \frac{3a}{4}$. Cette seconde valeur est la seule qui puisse ré-

soudre le problème, puisqu'elle réduit celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$ à $-\frac{9x^2}{4}$, résultat négatif.

102. Observons que, lorsque dans la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ il y a un facteur constant positif, on peut le supprimer. En effet, si nous avons

$$\frac{dy}{dx} = A \varphi x,$$

on en tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A \frac{d\varphi x}{dx}.$$

Cette seconde équation ne servant qu'à nous faire connaître le signe de la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, ce signe ne dépend que de celui qui affectera $\frac{d\varphi x}{dx}$ parce que A est un facteur constant positif : donc A peut être supprimé dans cette équation. Il peut l'être aussi dans l'équation $\frac{dy}{dx} = A \varphi x$; car puisque nous devons évaluer à zéro le second membre de cette équation, pour déterminer x , l'équation $A \varphi x = 0$ nous donnera $\varphi x = 0$; d'où il suit qu'on a le droit d'omettre la constante.

PROBLÈME IV.

103. *On veut faire entrer dans un vase cylindrique une certaine quantité d'eau dont le volume est connu; on demande quelles dimensions il faut donner à ce vase pour que sa surface interne soit aussi petite qu'il est possible.*

Soit V le volume d'eau donné, et x le rayon de la base du cylindre; πx^2 sera l'aire de la base du cylindre. Et puisque la hauteur de ce cylindre, multipliée par sa base, est égale en son volume, on aura

$$\text{hauteur du cylindre} \times \pi x^2 = V,$$

d'où l'on tirera

$$\text{hauteur du cylindre} = \frac{V}{\pi x^2};$$

en multipliant cette hauteur par la circonférence de la base qui est $2\pi x$, on aura

$$\frac{V}{\pi x^2} \times 2\pi x = \frac{2V}{x}$$

pour la surface convexe du cylindre. Si, à cette surface on ajoute πx^2 , qui est celle de la base du cylindre, l'équation à différencier sera

$$y = \frac{2V}{x} + \pi x^2,$$

et l'on en déduira

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2V}{x^2} + 2\pi x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4V}{x^3} + 2\pi.$$

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ étant égale à zéro donne

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

On voit que cette valeur répond à un minimum, puisqu'elle rend positive celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$: le rayon de la base du

cylindre cherché sera donc $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. Si on met cette valeur dans l'expression de la hauteur, on trouvera pour la hauteur du cylindre,

$$\frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2} = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Ce problème est applicable à l'artillerie; car, *une charge de poudre étant donnée, on peut se proposer de trouver quelles dimensions devrait avoir un mortier à chambre cylindrique pour que la poudre exerçât le plus petit effort contre les parois de la chambre.*

On voit que cette question se réduit à trouver quelle est la plus petite surface qu'on puisse donner à la chambre du mortier; et il suit de ce qui précède que le diamètre de la chambre doit être égal à sa hauteur.

PROBLÈME V.

104. *Entre tous les cônes inscrits dans une sphère, déterminer celui qui a une plus grande surface convexe.*

FIG. 16.

Supposons que le demi-cercle AMB , fig. 16, fasse une révolution autour de l'axe AB , la corde AM engendrera un cône, dont AP sera la hauteur, et PM le rayon de la base.

La surface convexe de ce cône aura pour expression, *circonférence* $PM \times \frac{1}{2} AM = 2\pi PM \cdot \frac{1}{2} AM = \pi PM \cdot AM$.

Il ne s'agit donc que de déterminer PM et AM .

Pour cet effet, soient $AB = 2a$, $AP = x$; MP étant moyenne proportionnelle entre AP et PB , on a

$$x : PM :: PM : 2a - x,$$

donc

$$PM = \sqrt{2ax - x^2};$$

AM étant moyenne proportionnelle entre AP et AB , on a

$$x : AM :: AM : 2a,$$

donc

$$AM = \sqrt{2ax};$$

substituant ces valeurs dans l'expression de la surface du

cône, on obtiendra,

$$\begin{aligned}\text{surface convexe du cône} &= \pi \sqrt{2ax - x^2} \sqrt{2ax} \\ &= \pi \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3};\end{aligned}$$

l'équation à différencier est donc (art. 102)

$$y = \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a^2x - 3ax^2}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} \dots (49).$$

En égalant à zéro cette valeur de $\frac{dy}{dx}$, nous obtiendrons

$$4a^2x - 3ax^2 = 0,$$

$$\text{ou plutôt } ax(4a - 3x) = 0,$$

équation satisfaite en faisant $x = 0$, ou en faisant

$$x = \frac{4a}{3}.$$

La première de ces valeurs ne peut appartenir qu'à un minimum. Il n'y a donc que la valeur $x = \frac{4a}{3}$ qui puisse répondre à la question; c'est ce qui va nous être confirmé par le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

105. Avant que de déterminer la valeur de ce coefficient différentiel, je vais expliquer un procédé qui abrégera les calculs dans de certains cas.

J'observerai préliminairement que, lorsqu'une fonction de x est nulle par une valeur qu'on donne à x , il ne s'ensuit pas qu'en général son coefficient différentiel soit aussi nul: par exemple, si l'on a la fonction $x^2 - 5x + 6$, qui devient nulle lorsque $x = 2$, ou lorsque $x = 3$, le coefficient différentiel de cette fonction, qui est $2x - 5$, ne devient pas nul dans ces hypothèses.

106. On peut quelquefois abréger beaucoup les opé-

rations qu'on emploie pour reconnaître si une fonction est susceptible d'un maximum ou d'un minimum. En effet, supposons que l'on veuille déterminer le coefficient différentiel de l'équation $y = XX'$, dans laquelle X et X' sont des fonctions de x , dont la première seule devient nulle par une valeur donnée à x ; en différenciant cette équation, art. 14, et en divisant par dx nous obtiendrons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{XdX'}{dx} + \frac{X'dX}{dx};$$

X , par hypothèse, étant nul, en vertu de la valeur donnée à x , cette équation se réduit à

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X'dX}{dx},$$

ce qui nous indique que, pour obtenir $\frac{dy}{dx}$, il faut multiplier le coefficient différentiel du facteur nul par l'autre facteur *.

107. Par exemple, si l'on veut obtenir le coefficient différentiel de $y = \frac{x-a}{\sqrt{x}}$ dans l'hypothèse de $x = a$; en écrivant ainsi cette équation,

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \times (x-a),$$

on trouvera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{d(x-a)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

* Cette règle n'est pas sans exception, car $\frac{dX}{dx}$ peut être aussi nul; par exemple, lorsque l'équation $X = 0$ a des racines égales, on sait qu'on a $\frac{dX}{dx} = 0$; dans ce cas, on observera que $\frac{dX}{dx}$ étant le coefficient différentiel du second ordre de l'équation qui donne le maximum ou le minimum, comme ce coefficient est nul, il faut, art. 95, recourir au coefficient différentiel du troisième ordre,

108. Reprenons maintenant l'équation (49), de laquelle on veut tirer la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, dans l'hypothèse de $x = \frac{4a}{3}$: en décomposant le numérateur en ses facteurs, nous aurons

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ax(4a-3x)}{\sqrt{4a^2x^2-2ax^3}};$$

le second membre peut s'écrire ainsi :

$$\frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2-2ax^3}} \times (4a-3x);$$

dans l'hypothèse actuelle, le facteur $4a-3x$ étant nul, nous aurons donc, art. 106,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2-2ax^3}} \times d(4a-3x) = -\frac{3ax}{\sqrt{4a^2x^2-2ax^3}}$$

et par conséquent, en divisant les deux termes de la fraction par x ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3a}{\sqrt{4a^2-2ax}};$$

mettant dans cette expression la valeur de x , qui est $\frac{4a}{3}$, on obtiendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3a}{\sqrt{4a^2-\frac{8a^2}{3}}} = -\frac{3a}{\sqrt{\frac{4a^2}{3}}}.$$

Cette valeur étant négative, celle de x correspond à un minimum.

PROBLÈME VI.

109. Un point C, fig. 17, étant donné dans l'angle YAX, FIG. 17. mener par ce point une droite DE, qui rencontre les axes AX, AY, de telle manière que la longueur DE, de cette droite, soit un minimum.

Soient $AL=a$, $IC=b$, $IE=x$; les triangles rectan-

gles ICE , ADE , nous donnent

$$IE : IC :: AE : AD,$$

ou

$$x : b :: a + x : AD,$$

donc

$$AD = \frac{b}{x} (a + x);$$

par conséquent

$$AD^2 = \frac{b^2}{x^2} (a + x)^2.$$

D'une autre part,

$$AE^2 = (a + x)^2;$$

substituant ces valeurs dans la formule

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2},$$

nous trouverons

$$DE = \sqrt{\frac{b^2}{x^2} (a + x)^2 + (a + x)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{x^2} + 1\right) (a + x)^2};$$

et, en réduisant au même dénominateur le premier facteur qui est sous le radical,

$$DE = \sqrt{\frac{b^2 + x^2}{x^2} (a + x)^2} = \frac{a + x}{x} \sqrt{b^2 + x^2} = y.$$

En regardant cette expression comme le produit du facteur $\frac{a + x}{x}$, par le facteur $\sqrt{b^2 + x^2}$, nous différencierons par l'art. 14, et nous trouverons

$$dy = \frac{a + x}{x} d\sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2} d\frac{a + x}{x};$$

effectuant les différentiations, nous aurons

$$dy = \frac{(a + x)}{x} \frac{x dx}{\sqrt{b^2 + x^2}} + \sqrt{b^2 + x^2} \times - \frac{a dx}{x^2};$$

réduisant au même dénominateur, en multipliant les deux termes de la première fraction par x , et les deux termes de la seconde par $\sqrt{b^2 + x^2}$, nous obtiendrons

$$dy = \frac{(a+x)}{x^2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{b^2 + x^2}} + \frac{b^2 + x^2}{x^2 \sqrt{b^2 + x^2}} \times -adx;$$

réunissant et réduisant les termes du numérateur, et divisant par dx , il nous viendra enfin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - ab^2}{x^3 \sqrt{b^2 + x^2}};$$

égalant le numérateur à zéro, nous trouverons

$$x = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Pour prouver que cette valeur répond à un minimum dans cette hypothèse, nous mettrons seulement, art. 106, à la place du numérateur qui est le facteur nul, son coefficient différentiel, et nous aurons ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2}{x^3 \sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{3}{\sqrt{b^2 + x^2}},$$

valeur essentiellement positive. On ne fait pas la substitution de la valeur de x , car on voit qu'un carré x^2 est toujours positif.

PROBLÈME VII.

110. *Trouver le plus-grand triangle rectangle qu'on puisse construire sur une droite donnée.*

Soient a cette droite, AB , fig. 18, x l'un des côtés du triangle, l'autre sera $\sqrt{a^2 - x^2}$; donc la surface du triangle a pour expression

$$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}:$$

ainsi l'équation du problème sera, art. 102,

$$y = x \sqrt{a^2 - x^2} \text{ ou plutôt } y = \sqrt{a^2 x^2 - x^4},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 x - 2x^3}{\sqrt{a^2 x^2 - x^4}}.$$

Cette valeur, étant égale à zéro, donne

$$a^2 x - 2x^3 = 0, \text{ ou } x(a^2 - 2x^2) = 0,$$

équation de laquelle on tire

$$x = 0, \text{ ou } 2x^2 = a^2.$$

x ne pouvant être nul, il n'y a que cette seconde équation qui puisse convenir : elle nous apprend que les deux côtés AC , BC sont égaux.

En différenciant le facteur $a^2 - 2x^2$, on trouve, art. 106,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 x^2 - x^4}} \times \frac{d(a^2 - 2x^2)}{dx} = -\frac{4x^3}{\sqrt{a^2 x^2 - x^4}}.$$

Ce résultat étant négatif, l'hypothèse de $a^2 - 2x^2 = 0$ détermine, pour x , une valeur qui correspond à un maximum.

De la signification géométrique des coefficients différentiels.

111. On a vu, art. 70, que $\frac{dy}{dx}$ représentait la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec l'axe des abscisses, une tangente menée au point dont les coordonnées sont x et y ; comme c'est le fondement de ce qui va suivre, on peut démontrer à priori cette pro-

position de la manière suivante ; soient, fig. 4, $PM=y$, FIG. 4.
 $PP'=h$; en menant la parallèle MQ à l'axe des abscisses, on a donc

$$MP' = f(x+h),$$

$$MQ = f(x+h) - f(x) = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

or

$$MQ : MP' :: 1 : \text{tang } S = \frac{MP'}{MQ},$$

et en mettant pour les expressions MP' , MQ , leurs valeurs, on aura

$$\text{tang. } S = \frac{\frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}}{h} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{1.2} + \text{etc.}$$

Passant à la limite, h est nul, et tangente S se change en tangente T .

Donc, alors,

$$\text{tang } T = \frac{dy}{dx}.$$

Cela posé, si PM devient un maximum, la tangente MT , fig. 19, étant alors parallèle à l'axe des abscisses, FIG. 19: elle fait un angle nul avec cet axe, et comme on a vu que la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente avec l'axe des x était représentée par $\frac{dy}{dx}$, on a donc, dans ce cas, $\frac{dy}{dx} = 0$.

On démontrerait de même que, si PM était un minimum, la tangente trigonométrique devenant aussi nulle dans ce cas, on devrait avoir $\frac{dy}{dx} = 0$.

Ainsi, cette expression $\frac{dy}{dx}$ n'exprime autre chose que la condition du parallélisme de la tangente en M à l'axe des abscisses.

112. Examinons, maintenant, dans quelle circonstance $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif ou négatif.

Pour cet effet, considérons d'abord le cas où la
FIG. 20 courbe, fig. 20, tourne sa convexité vers l'axe des abscisses.

Soient AP, x ; PM, y ; $PP' = P'P'' = h$; et par les points M et M' , menons la sécante $MM'S$, et les droites $MN, M'N'$, parallèles à l'axe des abscisses, nous aurons

$$M'O = MP' - MP = f(x + h) - fx,$$

c'est-à-dire,

$$M'O = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.};$$

Or, la similitude des triangles $MM'O$, MSN , nous donne

$$MO : MN :: M'O : SN,$$

ou

$$h : 2h :: M'O : SN;$$

donc,

$$SN = 2M'O;$$

et, en substituant pour $M'O$ sa valeur, on a

$$SN = 2 \frac{dy}{dx} h + 2 \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.};$$

D'une autre part,

$$M''P'' = f(x + 2h);$$

si on en retranche

$$NP'' = PM,$$

on aura

$$M''N = f(x + 2h) - y = \frac{dy}{dx} 2h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{4h^2}{1.2} + \text{etc.};$$

étant de cette valeur de $M''N$, celle de SN , il restera ,
fig. 20,

FIG. 20.

$$M''S = \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc.} \dots (50).$$

Dans le cas où la courbe , fig. 21 , tourne sa concavité vers l'axe des abscisses , pour avoir $M''S$, il faudra , au contraire , retrancher de la valeur de SN celle de $M''N$, ce qui donnera

$$M''S = -\frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc.} \dots (51).$$

En comparant ces deux valeurs (50) et (51) de $M''S$, on voit que , dans l'une , $\frac{d^2y}{dx^2}$ est précédé du signe + , et dans l'autre du signe — .

Cela posé , on peut faire en sorte que le signe du premier terme du développement de $M''S$ décide de celui de tout ce développement , et comme le carré h^2 , qui est essentiellement positif , ne peut influencer sur le signe de $\frac{d^2y}{dx^2} h^2$, le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ décidera seul du signe de la somme de tous les termes de la valeur de $M''S$.

En ne considérant donc les équations (50) et (51) , que relativement aux signes qui affectent chaque membre , on pourra supprimer h^2 , et les termes qui suivent $\frac{d^2y}{dx^2}$, et ces équations deviendront

$$M''S = + \frac{d^2y}{dx^2} , M''S = - \frac{d^2y}{dx^2} ,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = + M''S . . . (52) ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - M''S . . . (53).$$

Si l'on regarde y comme une quantité positive, $M'S$,
 FIG. 20. fig. 20, tombant du même côté que y , sera positif : l'équation (52) nous apprend donc que, lorsque la courbe tourne, fig. 20, sa convexité vers l'axe des abscisses, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif.

Si l'on considère ensuite l'équation (53) et la fig. 21 qui s'y rapporte, on verra que $-M'S$ représente une droite qui est d'un signe contraire à celui de y , et que,
 FIG. 21. par conséquent, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif dans le cas de la fig. 21, c'est-à-dire lorsque la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses.

En général, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est du même signe que y lorsque la courbe tourne sa convexité vers l'axe des abscisses, et prend un signe contraire lorsque la courbe tourne sa concavité vers le même axe.

La courbe tournant sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses, suivant que l'ordonnée est parvenue à son minimum, ou à son maximum, on voit pourquoi $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif dans le premier cas, et négatif dans le second.

113. On dit encore qu'il peut y avoir un maximum ou un minimum lorsque $\frac{dy}{dx} = \infty$. Pour expliquer ce que cette condition signifie, soit $y = fx$ l'équation d'une
 FIG. 22. courbe MN , fig. 22; il est certain que si l'on donne à x une valeur AP , cette équation déterminera l'ordonnée PM .

Si l'on résout ensuite l'équation, par rapport à y , et qu'on en tire $x = 2y$; lorsqu'on fera $y = AP$ (valeur

précédente de y), l'équation donnera $x = P/M$. Dans ce dernier cas, y sera considéré comme l'abscisse, et x comme l'ordonnée, et l'on construira la même courbe, pourvu qu'on porte les abscisses y sur l'axe AY , et que l'autre axe soit regardé comme celui des ordonnées.

Dans cette hypothèse, on peut donc chercher le maximum ou le minimum de la fonction x de y . Pour cet effet, de l'équation proposée, on tirera $\frac{dx}{dy} = M$, et l'on supposera $M = 0$; cela posé, l'équation $\frac{dx}{dy} = M$, nous donnant $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{M}$, on voit que lorsque $M = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$: ainsi, la condition nécessaire pour qu'il y ait un maximum ou un minimum dans le sens des abscisses, est qu'on puisse avoir $\frac{dy}{dx} = \infty$.

114. Par exemple, si l'on prenait l'équation

$$y^2 = px - b,$$

on en tirerait $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$. Cette valeur égalée à zéro donnerait $y = \infty$; donc la courbe ne peut avoir un maximum dans le sens des ordonnées qu'à une distance infinie de l'origine. Examinons, maintenant, si elle a une limite dans le sens des abscisses (par limite on dénomme, en général, le maximum et le minimum); pour cela, il faut supposer infinie la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ce qui nous donne $\frac{p}{2y} = \infty$, condition remplie lorsqu'on fait $y = 0$; dans cette hypothèse, la valeur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ se

réduit à $\frac{2}{p}$, résultat positif. On voit donc que la valeur de $y = 0$ correspond à un minimum de x . Nous déterminerons ce minimum en faisant $y = 0$ dans l'équation proposée, ce qui la réduira à $px - b = 0$, d'où nous tirerons $x = \frac{b}{p}$ pour le minimum cherché : ce mi-

FIG. 23. nimum est représenté par AM dans la fig. 23.

115. En terminant cette matière, nous remarquerons que l'équation $\frac{dy}{dx} = \infty$, nous indique que la tangente MT' , fig. 23, est celle d'un angle droit, et, par conséquent, est perpendiculaire à l'axe des x .

Des Courbes osculatrices.

FIG. 24. 116. Soient $y = \varphi x$, et $y = Fx$, les équations de deux courbes qui se rencontrent, fig. 24, au point M dont les coordonnées sont $AP = x'$, $PM = y'$, on aura donc, pour ce point,

$$\varphi x' = Fx';$$

supposons que x' devienne ensuite $x' + h$, les équations précédentes donneront

$$MP' = \varphi(x' + h) = \varphi x' + \frac{d\varphi x'}{dx'} h + \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \quad (54),$$

$$MP' = F(x' + h) = Fx' + \frac{dFx'}{dx'} h + \frac{d^2Fx'}{dx'^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \quad (55)$$

Si tous les termes correspondans de ces développemens sont identiquement les mêmes, les courbes se confondront; si l'on a, seulement, $Fx' = \varphi x'$, les courbes, comme nous l'avons vu, n'auront de commun que le point M ; si, outre $Fx' = \varphi x'$, on a $\frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}$, ces courbes se rapprocheront davantage; et encore plus, si, outre ces

équations, on a encore $\frac{d^2 Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2 \varphi x'}{dx'^2}$, et ainsi de suite; car, il est évident que la différence de $M''P'$ à $M'P'$, sera d'autant moindre qu'il y aura un plus grand nombre de termes égaux dans leurs développemens.

Cela posé, soient a, b, c , etc., les constantes de l'équation $y = Fx$; on peut, sans changer la nature de la courbe, donner des valeurs arbitraires à ces constantes: par exemple, si l'on a l'équation $y^2 = mx + nx^2$, qui est celle d'une ellipse, quelque valeur que l'on donne aux constantes m et n , cette équation ne cesse pas d'appartenir à une ellipse, puisque l'équation conserve toujours la même forme, (bien entendu que l'on ne fait varier m et n que de grandeur et non de signes, et qu'on ne les suppose pas nuls). D'après cette observation, on peut regarder comme arbitraires, les constantes a, b, c , etc., qui entrent dans les équations

$$y' = Fx', \quad \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}, \quad \frac{d^2 Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2 \varphi x'}{dx'^2}, \text{ etc. ;}$$

et en prenant autant de ces équations qu'il y a de constantes, on déterminera ces constantes par la condition que ces équations soient satisfaites.

Par exemple, si l'équation $y = Fx$ ne contient que trois constantes a, b, c , on posera

$$Fx' = \varphi x', \quad \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}, \quad \frac{d^2 Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2 \varphi x'}{dx'^2}.$$

On tirera, de ces équations, les valeurs de a , de b et de c en fonction de x' , de y' , de $\frac{dy'}{dx'}$, etc.; on les substituera dans l'équation $y = Fx$. Alors elle jouira de cette propriété que, lorsqu'on y mettra $x' + h$ à la place de x , l'équation (55) qu'on obtiendra, à l'aide de la formule

de Taylor, aura les trois premiers termes de son second membre respectivement égaux aux trois premiers du second membre de l'équation (54).

Ce que nous disons d'une équation qui ne renferme que trois constantes, peut s'appliquer à une qui en contiendrait un plus grand nombre.

117. Prenons, pour exemple, le cas où l'équation $y = Fx$ représente celle d'une ligne droite; cette équation $y = Fx$ sera donc remplacée par celle-ci

$$y = ax + b \dots (56).$$

Les équations de condition nécessaires pour l'élimination des constantes a et b , seront

$$\begin{aligned} y' &= ax' + b, \text{ ou plutôt } y' = ax' + b \dots (57), \\ \frac{dy'}{dx'} &= a, & \frac{dy'}{dx} &= a; \end{aligned}$$

en éliminant a , on obtiendra

$$y' = \frac{dy'}{dx} x' + b.$$

Substituant la valeur de b donnée par cette équation, et celle de a dans l'équation (56) de la ligne droite, celle-ci deviendra

$$y = \frac{dy'}{dx} x + y' - \frac{dy'}{dx} x',$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$y - y' = \frac{dy'}{dx} (x - x') \dots (58).$$

On reconnaît, dans cette équation, celle d'une tangente MT' , fig. 5, au point M , dont les coordonnées sont x' et y' . Nous verrons bientôt pourquoi cette droite MT' est tangente en M .

118. Reprenons la théorie précédente, et pour éviter les périphrases, convenons de dénommer les courbes par leurs équations. Nous avons vu, art. 116, que si les courbes $y = \varphi x$ et $y = Fx$ avaient seulement un point commun, en représentant par x' et y' , les coordonnées de ce point, on aurait l'équation de condition $Fx' = \varphi x'$; mais qu'en déterminant deux constantes de l'équation $y = Fx$, par les conditions $Fx' = \varphi x'$ et $\frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}$, les courbes commenceraient à se rapprocher.

Représentons par $y = fx$ ce que devient $y = Fx$, après qu'on y a substitué les valeurs de ces deux constantes, la courbe $y = fx$ sera une osculatrice du premier ordre à la courbe $y = \varphi x$; si toujours, en vertu des valeurs arbitraires qu'on peut donner aux constantes, on élimine trois des constantes de l'équation $y = Fx$, au moyen des équations suivantes,

$$Fx' = \varphi x', \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}, \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} \dots \dots (59),$$

et qu'on représente par ψx ce que devient Fx après cette substitution, cette courbe $y = \psi x$ sera une osculatrice, du deuxième ordre, à la courbe $y = \varphi x$ dont elle approchera encore plus; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait autant d'équations de condition que de constantes.

119. Nous allons démontrer que, de deux osculatrices qu'on a obtenues ainsi, en faisant varier les constantes d'une même équation, celle de ces osculatrices qui est d'un ordre inférieur, ne peut passer entre l'autre et la courbe à laquelle on a mené ces osculatrices.

Par exemple soit MB , fig. 24, la courbe $y = \varphi x$ FIG. 24.

et MC son osculatrice $y = \psi x$ du second ordre; il s'agit de démontrer que l'osculatrice $y = fx$ du premier ordre ne peut passer entre les courbes MB et MC .

Pour cet effet, en mettant $x' + h$ à la place de x dans ces équations, nous trouverons

$$P'M' \text{ ou } \varphi(x' + h) = \varphi x' + \frac{d\varphi x'}{dx'} h + \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

$$P'M'' \text{ ou } \psi(x' + h) = \psi x' + \frac{d\psi x'}{dx'} h + \frac{d^2\psi x'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3\psi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

$$f(x' + h) = fx' + \frac{dfx'}{dx'} h + \frac{d^2fx'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3fx'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

la courbe $y = \psi x$ étant une osculatrice du second ordre à $y = \varphi x$, il faut qu'on ait

$$\psi x' = \varphi x', \quad \frac{d\psi x'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}, \quad \frac{d^2\psi x'}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2},$$

D'une autre part, $y = fx$ étant une osculatrice du premier ordre à $y = \varphi x$, on a encore

$$fx' = \varphi x', \quad \frac{dfx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'};$$

en vertu de ces équations, on a donc

$$\varphi x' = \psi x' = fx',$$

$$\frac{d\varphi x'}{dx'} = \frac{d\psi x'}{dx'} = \frac{dfx'}{dx'},$$

et seulement

$$\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2\psi x'}{dx'^2};$$

faisons pour simplifier

$$\varphi x' + \frac{d\varphi x'}{dx'} h = K,$$

$$\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = V,$$

les trois développemens précédens pourront s'écrire ainsi :

$$P'M \text{ ou } \varphi(x' + h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

$$P'M' \text{ ou } \psi(x' + h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\psi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

$$f(x' + h) = K + \frac{d^2fx'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3fx'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.};$$

et en observant que tous les termes, à partir de celui qui est affecté de h^3 , ont h^3 pour facteur commun, nous pourrons supposer

$$\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.} = Mh^3,$$

et, en faisant des réductions analogues dans les autres équations, on aura

$$\varphi(x' + h) = K + Vh^2 + Mh^3,$$

$$\psi(x' + h) = K + Vh^2 + Nh^3;$$

$$f(x' + h) = K + \frac{d^2fx'}{dx'^2} h^2 + Ph^3.$$

Les courbes $y = fx$ et $y = \psi x$ étant des osculatrices, l'une du premier ordre, et l'autre du second ordre, V diffère nécessairement de $\frac{d^2fx'}{dx'^2}$. On ne peut donc faire que deux hypothèses sur V , savoir :

$$V < \frac{d^2fx'}{dx'^2} \text{ ou } V > \frac{d^2fx'}{dx'^2}.$$

Si V est moindre que $\frac{d^2fx'}{dx'^2}$, soit Z l'excès de $\frac{d^2fx'}{dx'^2}$ sur V , on aura

$$V + Z = \frac{d^2fx'}{dx'^2};$$

si au contraire V surpasse $\frac{d^2fx'}{dx'^2}$, la quantité Z sera négative.

En substituant cette valeur de $\frac{d^2fx'}{dx'^2}$, dans celle de $f(x' + h)$, et en observant que h^2 est facteur commun, nos trois développemens deviendront

$$\varphi(x' + h) = K + (V + Mh)h^2,$$

$$\psi(x' + h) = K + (V + Nh)h^2,$$

$$f(x' + h) = K + (V + Z + Ph)h^2.$$

Or, en faisant h très-petit, il est possible que la quantité Z indépendante de h soit plus grande que les expressions Mh et Nh qui tendent vers zéro. Alors, si Z est positif, $f(x' + h)$ surpasse $\varphi(x' + h)$ et $\psi(x' + h)$; dans ce cas, on a donc $f(x' + h)$ ou $P'M''$, fig. 24, plus grand que $P'M'$ et que $P'M''$, ce qui montre que la courbe $y = fx$, représentée par MM'' , ne peut passer entre les deux autres.

Si, au contraire, Z est négatif, on a $f(x' + h)$ ou $P'M''$, moindre que $P'M'$ et que $P'M''$. La courbe MM'' , étant alors celle qui s'approche le plus de l'axe des x , ne peut être comprise entre les deux autres.

120. On peut maintenant expliquer pourquoi la droite, fig. 5, qui, art. 117, est une osculatrice du premier ordre, est tangente à la courbe; car il résulte de notre théorie, qu'entre cette droite et la courbe, on ne peut faire passer aucune autre droite, ce qui est la propriété de la tangente.

On dit que la tangente a un contact du premier ordre avec la courbe. En général, une osculatrice d'un ordre n a un contact du même ordre avec la courbe à laquelle elle

est osculatrice : ainsi , lorsqu'on a entre deux courbes les équations

$$\varphi x' = Fx', \quad \frac{d\varphi x'}{dx'} = \frac{dFx'}{dx'}, \quad \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2Fx'}{dx'^2},$$

ces courbes ont entr'elles un contact du second ordre ; ce contact sera du troisième ordre , si outre ces équations on a encore celle-ci

$$\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} = \frac{d^3Fx'}{dx'^3} ;$$

et ainsi de suite.

121. L'équation du cercle qui est

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2,$$

renfermant trois constantes, nous pouvons déterminer le cercle qui a un contact du second ordre, avec une courbe *MN*, fig. 25, dont on a l'équation. Pour cet effet, soient FIG. 25. x' et y' , les coordonnées du cercle au point *M* ; la valeur de y' sera donnée par l'équation

$$(y' - \beta)^2 + (x' - \alpha)^2 = \gamma^2. \dots (60),$$

et devra remplacer Fx' dans les équations du contact qui sont

$$\varphi x' = Fx', \quad \frac{d\varphi x'}{dx'} = \frac{dFx'}{dx'}, \quad \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2Fx'}{dx'^2} ;$$

si nous adoptons en même temps x et y pour les coordonnées de la courbe $y = \varphi x$, au point de contact, les équations précédentes deviendront

$$y = y', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2} \dots (61);$$

il faudra donc mettre pour les quantités y' , $\frac{dy'}{dx'}$, et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$

leurs valeurs tirées de l'équation (60) et de ses différentielles successives, qui sont

$$(y' - \beta) \frac{dy'}{dx} + (x' - \alpha) = 0 \dots (62),$$

$$(y' - \beta) \frac{d^2 y'}{dx^2} + \frac{dy'}{dx} + 1 = 0 \dots (63).$$

Or, substituer dans les équations (61) les valeurs de y' , $\frac{dy'}{dx}$, $\frac{d^2 y'}{dx^2}$, données par les équations (60), (62) et (63), n'est autre chose qu'éliminer ces quantités entre les équations (60), (61), (62) et (63), ce qui revient à effacer les accents dans les équations (60), (62) et (63), en observant d'ailleurs que quand

$$y = y', \text{ on a } x = x';$$

supprimant donc les accents on trouvera

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2 \dots (64),$$

$$(y - \beta) \frac{dy}{dx} + (x - \alpha) = 0 \dots (65),$$

$$(y - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0 \dots (66).$$

De cette dernière équation on tire

$$y - \beta = - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \dots (67);$$

Mettant cette valeur dans l'équation (65), on obtient

$$x - \alpha = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} \dots (68).$$

Si dans l'équation (64) on substitue ces valeurs de $x - \alpha$ et de $y - \beta$, on aura

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2} + \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2} \frac{dy^2}{dx^2} = \gamma^2,$$

ou, en ajoutant les numérateurs qui ont un facteur commun,

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2} = \gamma^2;$$

cette équation se réduit à

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2} = \gamma^2;$$

et, en tirant la racine carrée,

$$\pm \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dy^2}{dx^2}} = \gamma.$$

122. Le double signe est relatif à la position de γ : si la courbe tourne sa concavité vers l'axe de x , alors $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera négatif, et pour qu'alors γ se détermine positivement, nous prendrons γ avec le signe négatif, et nous écrirons

$$\gamma = - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \dots (69)$$

car la courbe tournant sa concavité vers l'axe des abscisses, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tient la place d'une quantité négative, qui, lorsqu'elle sera substituée dans la valeur de γ , la rendra positive.

123. On a donné au cercle que nous venons de considérer, le nom de cercle osculateur, et à son rayon, celui de rayon de courbure; il ne s'agira donc, pour obtenir le rayon de courbure, que d'avoir l'équation de la courbe, pour en déduire les coefficients différentiels qu'on substituera dans la formule 69.

124. Si la courbe devait tourner sa convexité vers l'axe des x , nous ferions précéder la valeur de γ du signe positif.

Par exemple, pour avoir le rayon de courbure de la parabole, *NAM*, fig. 26 dont l'équation est $x^2 = my$, nous trouverons

$$2x dx = m dy, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{m},$$

donc

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{4x^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}} = \frac{\left[\frac{4}{m^2} \left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}},$$

et en élevant les deux facteurs à la puissance $\frac{2}{3}$, on a

$$\gamma = \frac{8}{m^2} \frac{\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{m}} = \frac{\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{m^2}{4}} \dots (70);$$

or, la normale à la parabole ayant pour expression $\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, on voit que le rayon de courbure de la

parabole est égal au cube de la normale, divisé par le carré du demi-paramètre.

125. Le cercle osculateur peut servir à mesurer la courbure de la courbe en un point M , fig. 25 ; car si FIG. 25.
en ce point M on décrit avec le rayon de courbure un arc ML , très-petit, cet arc pourra être considéré comme l'arc même de la courbe, dont il s'écarte très-peu ; or, plus l'arc ML a de courbure, plus son rayon est petit ; d'où il résulte que le rayon de courbure est en raison inverse de la courbure de la courbe.

Par exemple, en considérant l'équation (70), qui donne le rayon de courbure de la parabole, on voit qu'au sommet de la courbe où $x = 0$, $\gamma = \frac{m}{2}$; mais que lorsque x s'accroît successivement, γ augmente, ce qui annonce que la courbure de la parabole va en diminuant lorsqu'on s'écarte du sommet.

126. $\frac{dy}{dx}$ exprimant la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente en M , fig. 27, fait avec l'axe des x , FIG. 27.
l'équation de la normale assujétie à passer par un point dont les coordonnées sont α et β , sera

$$y - \beta = -\frac{dy}{dx} (x - \alpha).$$

Cette équation étant la même que l'équation (65) dans laquelle α et β sont les coordonnées du centre du cercle osculateur, on voit que le rayon de ce cercle est une normale à la courbe.

127. Si maintenant par tous les points de la courbe MM' $M''M'''$, fig. 28, on mène des rayons de courbure MO , $M'O$, $M''O''$, etc., les centres O , O' , O'' , détermineront

une courbe à laquelle on a donné le nom de développée.

128. Cette courbe qui est le lieu de tous les centres, est ainsi appelée, parce que si AZ , fig. 29, est la développée d'une courbe quelconque BC , et que sur AZ on applique un fil qui, se terminant tangentiellément, soit fixé au point B de la courbe BC ; lorsqu'on développera ce fil en le tenant constamment tendu, l'extrémité C de ce fil décrira dans ce mouvement la courbe BC .

Cette courbe BC , considérée relativement à la développée AZ , est appelée la développante.

129. Pour démontrer cette propriété, soit M , fig. 28, un point donné sur une courbe, et MO le rayon de courbure qui aboutit à ce point; décrivons un petit arc MM' , et supposons qu'en M' , le rayon de courbure s'accroisse de OO' et devienne $M'O'$; si avec le rayon $M'O'$, on décrit un second arc $M'M''$, et qu'au point M'' le rayon de courbure s'accroisse encore de $O'O''$, ainsi de suite; il est évident que, si un fil enveloppe le polygone $OO'O''$, etc., et se confondant avec MO , se termine en M , lorsqu'on fera monvoir l'extrémité M du fil, en le tenant constamment tendu, cette extrémité M décrira successivement la figure curviligne $MM'M''$, en même temps que le fil qui enveloppe le polygone, se déroulera.

Si les arcs deviennent de plus en plus petits, la figure curviligne et le polygone auront respectivement pour limites la développante et la développée; d'où il suit que la développée, en se rectifiant successivement, engendrera la développante.

FIG. 30. 130. Lorsque le rayon de courbure MO , fig. 30, est devenu $M'O'$, le rayon de courbure s'étant accru de toute,

la longueur de l'arc OO' , qui s'est rectifié, il en résulte que

$$M'O' - MO = \text{arc } OO'.$$

131. Si l'on passe d'un point à un autre de la courbe, non-seulement x et y varient, mais encore α , β et γ varient en même temps, car α , β et γ , sont les coordonnées et le rayon du centre du cercle osculateur, qui diffèrent pour chaque point de la courbe : ainsi en différenciant l'équation (65) par rapport à toutes les lettres *, et en divisant par dx , nous obtiendrons

$$(\gamma - \beta) \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dx^2} - \frac{d\gamma}{dx} \frac{d\epsilon}{dx} + 1 - \frac{d\alpha}{dx} = 0;$$

retranchant l'équation (66) de celle-ci, il reste

$$-\frac{d\gamma}{dx} \frac{d\epsilon}{dx} - \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\epsilon}{dx}} = -\frac{d\alpha}{dx} \times \frac{1}{\frac{d\epsilon}{dx}};$$

or, art. 67,

$$\frac{1}{\frac{d\epsilon}{dx}} = \frac{dx}{d\epsilon},$$

* On ne peut pas différencier autrement l'équation $(\gamma - \epsilon)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2$, et ses dérivées; cependant il semble que nous ayons agi autrement, lorsque de l'équation (60) nous avons déduit les équations (62) et (63). Je répondrai que, comme nous avons deux constantes arbitraires dans l'équation (60), nous les avons déterminées par la condition que les fonctions représentées par les premiers membres des équations (62) et (63), fussent nulles; mais, sans cela, nous n'aurions pas eu le droit de conclure de ce que l'équation (60) a lieu, que les équations (62) et (63) doivent aussi avoir lieu.

donc

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{da}{dx} \times \frac{dx}{d\zeta},$$

et par conséquent, art. 24,

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{da}{d\zeta};$$

si l'on substitue cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (65), on obtiendra

$$y - \beta = \frac{d\zeta}{da} (x - \alpha) \dots \dots (71).$$

132. Nous avons vu, art. 126, que l'équation $y - \beta = - \frac{dx}{dy} (x - \alpha)$, était celle du rayon de courbure qui passait par le point dont les coordonnées sont x et y . En remplaçant $-\frac{dx}{dy}$ par $\frac{d\zeta}{da}$, ce sera toujours l'équation du même rayon; mais l'équation (71) étant aussi celle d'une tangente menée au point de la développée, dont les coordonnées sont α et β *, le rayon de courbure est donc tangente à la développée.

133. Comme dans la démonstration suivante nous emploierons la différentielle d'un arc de courbe, nous allons déterminer cette différentielle.

FIG. 31. Supposons qu'une abscisse $AP = x$; fig. 31, s'accroisse

* Observons qu'en général a et ζ étant les coordonnées d'un point quelconque de la développée, l'équation de la développée sera $\zeta = f(a)$; donc $\frac{d\zeta}{da}$ représente, art. 70, l'angle que la tangente au point a, ζ , fait avec l'axe des abscisses.

de $PP' = h$; si nous menons la parallèle MO à l'axe des x , nous aurons évidemment

$$\text{corde } MM' = \sqrt{MO^2 + M'O^2} = \sqrt{h^2 + M'O^2},$$

or,

$$MO = f(x + h) - f(x) = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.};$$

substituant cette valeur dans l'expression de MM' , et en représentant par A , par B , etc., les coefficients de h^3 , de h^4 , etc., on aura

$$MM' = \sqrt{h^2 + \frac{dy^2}{dx^2} h^2 + Ah^3 + Bh^4 + \text{etc.}},$$

$$\text{ou } MM' = \sqrt{h^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + Ah^3 + Bh^4 + \text{etc.}},$$

donc

$$\frac{MM'}{h} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ah + Bh^2 + \text{etc.}}$$

Dans le cas de la limite, la corde se confond avec l'arc que je représenterai par s , de sorte que nous aurons

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

d'où nous tirons, en multipliant par dx ,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

134. Pour la développée, dont les coordonnées sont α et β , nous aurons donc également

$$ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}.$$

135. Différencions maintenant l'équation (64) par rap-

port à toutes les lettres, nous trouverons

$$(\gamma - \beta) (d\gamma - d\beta) + (x - \alpha) (dx - d\alpha) = \gamma d\gamma,$$

l'équation (65) nous donne

$$(\gamma - \beta) d\gamma + (x - \alpha) dx = 0;$$

retranchant ce résultat de l'équation précédente, il nous reste

$$-(\gamma - \beta) d\beta - (x - \alpha) d\alpha = \gamma d\gamma. \dots (72).$$

Si dans cette équation (72) et dans l'équation (64), nous substituons la valeur de $\gamma - \beta$, donnée par l'équation (71), nous trouverons ces deux équations

$$-\frac{d\zeta}{d\alpha} (x - \alpha) - (x - \alpha) d\alpha = \gamma d\gamma,$$

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} (x - \alpha)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2;$$

mettant $(x - \alpha)$ en facteur commun, et tirant la racine carrée de la seconde, ces équations deviennent

$$-(x - \alpha) \frac{(d\zeta + d\alpha^2)}{d\alpha} = \gamma d\gamma,$$

$$(x - \alpha) \frac{\sqrt{d\alpha^2 + d\zeta^2}}{d\alpha} = \gamma;$$

divisant la première de ces équations par la seconde, on obtient

$$d\gamma = -\sqrt{d\beta^2 + d\alpha^2};$$

Or, nous avons vu, art. 134, qu'en appelant s un arc de la développée, on avait

$$ds = \sqrt{d\beta^2 + d\alpha^2};$$

en comparant cette équation à la précédente, nous en déduirons

$$d\gamma = -ds, \text{ ou } d(\gamma + s) = 0,$$

et comme toute fonction dont la différentielle est nulle, est constante, nous avons donc $\gamma + s = \text{constante}$; donc si le rayon de courbure s'augmente, il faut que s diminue d'autant, ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu.

On énonce cette proposition en disant que *le rayon de courbure varie par les mêmes différences que la développée.*

136. Soient, fig. 30, $MO = \gamma$; $OB = s$; $M'O' = \gamma'$; $O'B = s'$; nous avons donc pour le rayon de courbure MO

$$\gamma + s = \text{constante},$$

ou

$$MO + \text{arc } OB = \text{constante.} \dots (73).$$

Pareillement, le rayon de courbure $M'O'$ donne lieu à l'équation

$$\gamma' + s' = \text{constante},$$

ou

$$M'O' + \text{arc } O'B = \text{constante.} \dots (74);$$

les seconds membres des équations (73) et (74), représentant une même constante, nous tirerons de ces équations

$$M'O' + \text{arc } O'B = MO + \text{arc } OB,$$

et par conséquent,

$$MO - M'O' = \text{arc } OB - \text{arc } O'B = \text{arc } OO',$$

ce qui nous apprend que *la différence de deux rayons de courbure est égale à l'arc qu'ils comprennent entre eux*; résultat conforme à celui auquel nous étions déjà parvenus par la synthèse, art. 131.

137. Voici de quelle manière on peut trouver l'équa-

tion de la développée : 1°. on tirera de l'équation de la courbe les valeurs de y , et des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., suivant l'ordre du contact ; 2°. on substituera ces valeurs dans les équations (65) et (66), ce qui donnera deux nouvelles équations, qui ne seront plus que des fonctions de x ; 3°. éliminant x entre ces équations, on parviendra à une équation entre α et β . Cette équation sera celle de la développée.

138. Déterminons par ce procédé la développée de la parabole, dont l'équation est $x^2 = my^*$, en différenciant on trouve

$$2x dx = m dy, \text{ et par conséquent}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{m};$$

substituant dans les équations (65) et (66), ces valeurs de y , de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, ces équations deviennent

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)\frac{2x}{m} + x - \alpha = 0. \dots (75),$$

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)\frac{2}{m} + \frac{4x^2}{m^2} + 1 = 0. \dots (76);$$

retranchant l'équation (75) de l'équation (76), multipliée par x , on obtiendra

$$\alpha + \frac{4x^3}{m^2} = 0. \dots (77).$$

* Dans ma Théorie des courbes du second ordre, ainsi que dans les autres traités de géométrie analytique, l'équation de la parabole est $y^2 = px$: je n'ai mis cette équation sous une autre forme que pour faciliter la différentiation. Lorsqu'on voudra employer les formules usitées dans ces traités, il faudra changer réciproquement les coordonnées.

D'une autre part, l'équation (76) multipliée par m^3 , et réduite, nous donne

$$6x^3 - 2m\beta + m^3 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\beta = \frac{3x^3}{m} + \frac{m}{2} \dots \dots (78).$$

En éliminant x entre les équations (77) et (78), on aura l'équation de la développée.

Mais avant de faire cette opération, remarquons que pour l'origine où $x = 0$, les équations (77) et (78) se réduisent à $\alpha = 0$, $\beta = \frac{m}{2}$; en prenant donc $AB = \frac{m}{2}$, fig 31, FIG. 31.

on a le point B de la développée; on voit ensuite par l'équation (78), qu'en donnant des valeurs positives ou négatives à x , β augmente à mesure que ces valeurs s'accroissent, d'où il résulte que la développée se compose de deux branches BC et BD .

Pour éliminer x entre les équations (77) et (78), la première, élevée au carré, donne

$$x^6 = \alpha^2 \frac{m^4}{16};$$

d'une autre part, on tire de l'équation 78,

$$x^3 = \left(\beta - \frac{m}{2}\right) \frac{m}{3};$$

en élevant au cube les deux membres de cette équation, on trouve

$$x^6 = \left(\beta - \frac{m}{2}\right)^3 \frac{m^3}{27};$$

égalant ces deux valeurs de x^6 , et divisant par m^3 , on obtient

$$\alpha^2 \frac{m}{16} = \left(\beta - \frac{m}{2}\right)^3 \frac{1}{27},$$

appelons β' la quantité $\beta - \frac{m}{2}$, et multiplions par 27, cette équation devient

$$\beta'^3 = \frac{27}{16} m \alpha^3 = n \alpha^3 *;$$

en faisant $\frac{27}{16} m = n$. L'origine est alors transportée en B ,

puisque $\beta' = \beta - \frac{m}{2}$.

139. Une osculatrice peut être située de deux manières différentes, à l'égard de la courbe avec laquelle elle est en contact; 1°. elle peut avoir ses deux branches, toutes deux

FIG. 33. au-dessus de la courbe, comme dans la fig. 33, ou toutes

FIG. 34. deux au-dessous comme dans la fig. 34; alors l'osculatrice

ne fera que toucher la courbe; 2°. l'osculatrice peut avoir une branche au-dessus de la courbe, et l'autre, au-dessous,

FIG. 35. comme dans la fig. 35, dans ce cas, l'osculatrice coupera la courbe au point M .

FIG. 36. 140. On va démontrer, fig. 36, que le cercle osculateur coupe la courbe.

Soient pour une même abscisse $x + h$,

Y l'ordonnée de la courbe,

Y' l'ordonnée de l'osculatrice.

* Il est facile de prouver que les branches BC , BD se tournent leurs convexités; car en différenciant l'équation $\zeta^3 = n\alpha^3$,

on trouve $\frac{d^2\zeta'}{d\alpha^2} = -\frac{2}{3} n^{\frac{2}{3}} \alpha^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{n}{\alpha^4}}$, valeur négative pour

α positif, comme pour α négatif: ce qui prouve que chaque branche tourne sa concavité vers l'axe des x .

On a donc ,

$$Y = \varphi (x' + h) = \varphi x' + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.},$$

$$Y' = F(x' + h) = Fx' + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.}$$

Or , puisque le cercle est une osculatrice du second ordre , les trois premiers termes de ces développemens seront les mêmes ; donc la différence des ordonnées qui correspondent à $x + h$, sera

$$(C - C')h^3 + \text{etc.} \dots \dots (79).$$

Supposons maintenant que l'abscisse devienne $x - h$, il faudra changer h en $-h$, dans la différence des ordonnées , qui deviendra ,

$$-(C - C')h^3 + \text{etc.} \dots \dots (80).$$

Or , comme le premier terme des suites (79) et (80) peut surpasser la somme de tous les autres termes , en prenant h assez petit , il en résulte que la différence des ordonnées changera de signe , lorsque l'abscisse , au lieu d'être $x + h$, sera $x - h$; ainsi , en prenant , fig. 36, $PP'' = PP' = h$, si FIG. 36. la différence des ordonnées correspondantes à $x + h$, est une quantité positive . c'est-à-dire , si l'ordonnée $P'M$ de la courbe surpasse $P'N$, l'ordonnée $P'N''$ de l'osculatrice surpassera l'ordonnée $P'M'$ de la courbe : d'où l'on conclura que l'osculatrice est d'un côté au-dessus de la courbe et de l'autre au-dessous , et par conséquent la coupe.

Ce que nous disons du cercle qui est une osculatrice du deuxième ordre , peut s'appliquer à toute osculatrice d'ordre pair.

141. Si l'osculatrice était d'un ordre impair , elle toucherait seulement la courbe , au lieu de la couper. Cela est évident d'après la démonstration précédente.

Des courbes transcendentes.

142. On appelle ainsi les courbes qui contiennent des quantités transcendentes ou des coefficients différentiels, et en général, les courbes dont les équations ne peuvent être exprimées par un nombre fini de termes algébriques. Nous ferons connaître quelques-unes des plus remarquables de ces courbes.

De la spirale d'Archimède ou de Conon.

143. Voici la génération de cette courbe : tandis que le
 FIG. 37. rayon AB , fig. 37, décrit une révolution, un point A se transporte du centre A à l'extrémité B de ce rayon, et se meut d'un mouvement uniforme, de telle manière que le point mobile qui était en A au commencement de la rotation de AB , se trouve en B lorsque AB a décrit une révolution entière autour du centre A . Le point mobile décrit dans ce mouvement la spirale d'Archimède.

Soient $AB = a$, arc $BN = t$, $AM = u$: on a donc, d'après la définition précédente,

$$AM : AN :: \text{arc } NB : BCDB,$$

ou

$$u : a :: t : 2\pi a,$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{t}{2\pi}.$$

Cette courbe, comme on le voit, n'a pas ses coordonnées rectangulaires. Lorsque AB a décrit une révolution entière, l'arc NB équivalant à la circonférence; donc alors

$t = 2\pi a$, ce qui change l'équation précédente en

$$u = \frac{2\pi a}{2\pi}, \text{ ou } u = a.$$

Si le point A continue à se mouvoir toujours uniformément, le rayon AB décrira une seconde révolution autour du centre A ; et si l'on prend $BB' = BA$, le point mobile arrivera en B' , au bout de cette seconde révolution : alors t sera égal à $4\pi a$, ce qui donnera $u = 2a$; ainsi de suite.

De la logarithmique.

144. La logarithmique est une courbe dans laquelle l'abscisse est le logarithme de l'ordonnée; l'équation de cette courbe est donc

$$x = \log y,$$

d'où l'on tire

$$y = a^x,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a.$$

145. Pour discuter cette équation, faisons $x = 0$, nous trouverons $y = 1$; si l'on donne ensuite des valeurs croissantes et positives à x , y ira toujours en croissant; mais si l'on donne à x une valeur négative $-u$, on trouvera $y = a^{-u} = \frac{1}{a^u}$; et l'on voit que l'ordonnée diminuera d'autant plus qu'on s'écartera de l'origine, dans le sens des abscisses négatives, et qu'enfin la courbe ne pourrait atteindre le prolongement de l'axe des x , qu'à l'infini, cas où l'équation $y = \frac{1}{a^u}$, deviendrait $y = \frac{1}{a^\infty} = 0$: d'où l'on peut conclure que le prolongement de l'axe des x est une asymptote à la courbe.

146. Si, à partir de l'origine, on prend des abscisses
 FIG. 38. égales, fig. 38, $AP = u$, $AP' = -u$, on trouvera
 $PM = a^u$, $P'M' = \frac{1}{a^u}$, donc $PM \times P'M' = 1$.

147. La propriété la plus remarquable de cette courbe, est que la sous-tangente a une valeur constante. En effet, l'équation de la logarithmique, étant différenciée, nous donne $\frac{dy}{dx} = a^x \log a$, d'où nous tirons $\frac{a^x dx}{dy} = \frac{1}{\log a}$, ou $\frac{y dx}{dy} = \frac{1}{\log a}$. Or le premier membre de cette équation exprime la sous-tangente de la courbe, art. 68, donc cette sous-tangente est constante.

De la Cycloïde.

148. La cycloïde est une courbe qui est décrite par le
 FIG. 39. mouvement d'un point M , fig. 39, situé sur la circonférence d'un cercle qui roule sur une droite RC . Il est certain que dans ce mouvement de R en C , tous les points de l'arc RM viendront successivement s'appliquer sur la droite RA , jusqu'à ce que M , à son tour, s'y applique en A ; par conséquent, l'arc RM sera égal à la droite RA .

149. Tous les points par lesquels passe le point M , dans ce mouvement, étant par hypothèse sur la cycloïde, le point A sera aussi sur cette courbe. Prenons-le pour origine des abscisses, et abaissons la perpendiculaire ME sur le diamètre BR , et faisons $AP = x$, $PM = y$, $BR = 2a$, arc $MR = z$, $ME = u$, nous aurons

$$AP = AR - PR,$$

$$\text{ou } x = \text{arc } MR - ME,$$

$$\text{ou } x = z - u. \dots (81).$$

Nous chercherons d'abord à éliminer l'arc z de la manière suivante : nous différencierons l'équation précédente, ce qui nous donnera

$$dx = dz - du \dots (82).$$

Pour avoir la valeur de dz en fonction de u , nous observerons qu'entre u et z nous avons la relation

$$u = \sin z.$$

Cette équation étant différenciée, art. 42, on trouve

$$du = dz \frac{\cos z}{a},$$

d'où l'on tire

$$dz = \frac{adu}{\cos z};$$

il faut remplacer dans cette équation la valeur de $\cos z$, par celle que nous donne l'équation

$$\sin^2 z + \cos^2 z = a^2,$$

ou plutôt

$$u^2 + \cos^2 z = a^2,$$

et l'on obtient

$$dz = \frac{adu}{\sqrt{a^2 - u^2}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (82) il vient

$$dx = \frac{adu}{\sqrt{a^2 - u^2}} - du \dots (83):$$

il ne s'agit plus que d'exprimer u en fonction de y . Pour cet effet, soit O le centre du cercle générateur BMR , fig. 39, nous avons

FIG. 39.

$$OE = \sqrt{MO^2 - ME^2},$$

ou

$$a - y = \sqrt{a^2 - u^2} \dots (84).$$

Élevant cette équation au carré, et réduisant ; on en tire

$$u = \sqrt{2ay - y^2} \dots (85),$$

et en différenciant,

$$du = \frac{(a-y) dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \dots (86).$$

Les équations (84) et (86) transforment l'équation (83) en

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{2ay - y^2}} + \frac{(a-y) dy}{\sqrt{2ay - y^2}} ;$$

réduisant, on trouve

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} ;$$

telle est l'équation de la cycloïde.

150. On peut encore obtenir l'équation de la cycloïde en fonction de l'arc, ainsi qu'il suit : l'équation $u = \sin z$ donne

$$z = \arcsin u ;$$

mettant pour u sa valeur tirée de l'équation (85), on a

$$z = \arcsin (\sin = \sqrt{2ay - y^2}) ;$$

cette valeur et celle de u étant substituées dans l'équation (81), on a

$$x = \arcsin (\sin = \sqrt{2ay - y^2}) - \sqrt{2ay - y^2} \dots (87).$$

151. Pour discuter cette équation, on va prouver d'abord que y ne peut être négatif, ni plus grand que

* Le sinus ici correspond au rayon a ; celui des tables serait

$$\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}.$$

Si l'on voulait introduire ce sinus, il faudrait écrire

$$x = a \arcsin \left(\sin = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} \right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

2a. En effet, si l'on fait $y = -j'$, l'expression $\text{arc} (\sin = \sqrt{2ay - j^2})$, devient $\text{arc} (\sin = \sqrt{-2aj' - j'^2})$, valeur imaginaire. En second lieu, si l'on fait $y = 2a + \delta$, l'expression $\text{arc} (\sin = \sqrt{2a\delta - \delta^2})$, devient $\text{arc} (\sin = \sqrt{-2a\delta - \delta^2})$, valeur imaginaire : donc, si à une distance $EF = 2a$ de l'axe des x , on mène, fig. 40, AB FIG. 40. parallèle à CD , la courbe sera comprise entre les parallèles CD et AB .

La plus grande valeur que puisse avoir y est $2a$, car si l'on fait rouler le cercle générateur de A en C , fig. 41, FIG. 41. le point M , qui était d'abord en A , s'élèvera successivement jusqu'à ce qu'il arrive en B , à l'extrémité du diamètre BD . Alors, l'abscisse AD sera égale à DEB , c'est-à-dire, à la demi-circonférence du cercle générateur.

Ce résultat est conforme à celui qui nous est donné par l'équation (87), puisque si l'on fait $y = 2a$, on trouve $x = \text{arc} (\sin = 0)$; or, l'arc dont le sinus est nul, doit être l'un des suivans 0, DEB , $2DEB$, $3DEB$, etc., et l'on voit que dans le cas présent, cet arc est DEB .

Le point M parvenu en B , ayant donc décrit l'arc AB de cycloïde, si ce point continué à se mouvoir, il décrira un second arc BC , semblable au premier; enfin, si le cercle générateur continue toujours à rouler sur l'axe des abscisses, le point M engendrera une suite indéfinie d'arcs de cycloïde $Cb'C''$, fig. 42, $C''B''C'''$, etc. Le FIG. 42. cercle générateur pouvant aussi se mouvoir dans le sens de A , vers A' , le point M décrira encore une suite indéfinie d'arcs $Ab'A'$, $A'B'A'$, etc.

C'est l'assemblage de tous ces arcs, qui, dans le sens le plus général, constitue la cycloïde.

152. La normale au point M dont les coordonnées
 FIG. 43. sont x et y , fig. 43, est déterminée, art. 69, par cette
 formule :

$$\text{normale} = y \sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + 1};$$

si dans cette formule nous mettons la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée
 de l'équation de la cycloïde, nous trouverons

$$\text{normale} = y \sqrt{\frac{2ay - y^2}{y^2} + 1} = \sqrt{2ay}.$$

FIG. 43. Pour construire cette valeur, menons la corde MD , fig. 43,
 nous aurons

$$DE : MD :: MD : DB,$$

ou

$$y : MD :: MD : 2a,$$

$$\text{donc la corde } MD = \sqrt{2ay},$$

et comme, par la propriété du cercle, l'angle BMD est
 droit, la corde MB sera perpendiculaire à l'extrémité
 de la normale MD : donc la corde MB prolongée est
 tangente, au point M de la cycloïde; car on sait que
 la tangente et la normale forment entr'elles un angle
 droit.

On pourrait donc construire la tangente au point M ,
 en décrivant le demi-cercle générateur BMD , et en
 prolongant la corde BM ; mais pour n'avoir pas à cons-
 truire ce cercle générateur à chaque point de la courbe,
 il suffira de construire le demi-cercle générateur sur
 FIG. 44. la plus grande ordonnée BD , fig. 44, de la cycloïde;
 et ayant mené par le point donné M la perpendicu-

laire ME sur BD , on tracera la corde BC ; alors la parallèle MT à cette corde, sera la tangente demandée : c'est une suite de ce qui précède.

153. Pour avoir l'expression du rayon de courbure de la cycloïde, il faut, de l'équation de cette courbe, déduire les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, que nous substituerons dans l'expression du rayon de courbure, art. 122,

$$r = - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

L'équation de la cycloïde nous donne d'abord.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} \dots (88).$$

Pour obtenir $\frac{d^2y}{dx^2}$ faisons $\frac{dy}{dx} = p$, nous aurons donc aussi

$$p = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1},$$

et en différenciant, art. 23, nous trouverons

$$dp = - \frac{\frac{2a}{y^2} dy}{2 \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}} = - \frac{a dy}{y \sqrt{2ay - y^2}};$$

donc

$$\frac{dp}{dy} = - \frac{a}{y \sqrt{2ay - y^2}};$$

multipliant cette équation par l'équation (88) nous obtenons, art. 24,

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{a}{y^2}, \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{a}{y^2};$$

au moyen de ces valeurs, on a enfin

$$\gamma = \frac{\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{a}{\gamma^{\frac{1}{2}}}} = \frac{(2a)^{\frac{1}{2}}}{\frac{a\gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{-\frac{1}{2}}},$$

et en faisant passer γ au numérateur,

$$\gamma = 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2a\gamma};$$

FIG. 45. donc le rayon de courbure, MM' , fig. 45, de la cycloïde, est double de la normale MR .

154. On obtiendra l'équation de la développée en substituant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans les formules, art. 121,

$$\gamma - \beta = -\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x - \alpha = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -(\gamma - \beta) \frac{dy}{dx},$$

et l'on trouvera

$$\gamma - \beta = \frac{\frac{2a}{\gamma}}{\frac{a}{\gamma^{\frac{1}{2}}}} = 2\gamma, \quad x - \alpha = -2\sqrt{2a\gamma - \gamma^2},$$

donc

$$\beta = -\gamma, \quad \alpha = x + 2\sqrt{2a\gamma - \gamma^2},$$

ou, fig. 46,

$$QM = MP, \quad \alpha = AP + 2ME,$$

et en observant que $AP + ME = AR$, la dernière équation peut s'écrire ainsi :

$$\alpha = AR + ME \dots (89).$$

Prolongeons BR , et prenons $RL = BR = 2a$, et sur RL décrivons la demi-circonférence $RM'L$; cette demi-circonférence passera par le point M' , à cause des cordes égales MR et MR' , et l'on aura

$$\text{arc } MR = \text{arc } MR' \text{ et } ME = ME';$$

substituant ces valeurs dans l'équation (89), on trouvera

$$\alpha = \text{arc } MR + ME';$$

donc

$$\alpha = \text{arc } MR + \sqrt{2a\beta - \beta^2} \dots (90).$$

Telle est l'équation qui existe entre les coordonnées $AQ = \alpha$ et $QM' = \beta$ d'un point M' de la développée. Prolongeons maintenant, fig. 46, l'ordonnée $CD = 2a$, FIG 46, d'une quantité DA' , encore égale à $2a$, et par le point A' menons la parallèle $A'D$ à AD , et transportons l'origine A au point A' . Pour cet effet, soient $A'Q' = \alpha'$, $QM' = \beta'$, nous avons pour l'abscisse

$$A'Q' = AD - AQ,$$

ou

$$\alpha' = \frac{1}{2} \text{ circonférence génératrice} - AQ,$$

ou

$$\alpha' = \pi a - \alpha;$$

à l'égard de l'ordonnée β' , nous avons

$$MQ' = A'D - QM',$$

ou

$$\beta' = 2a - \beta;$$

on tire de ces équations

$$\alpha = \pi a - \alpha', \beta = 2a - \beta';$$

au moyen de ces valeurs, l'équation (90) devient

$$\pi a - \alpha' = \text{arc } M'R + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2},$$

ou

$$\begin{aligned} \pi a - \alpha' &= \text{arc } RML - \text{arc } ML + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2} \\ &= \pi a - \text{arc } ML + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\alpha' = \text{arc } ML - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

Cette équation est celle d'une cycloïde : donc la développée d'une cycloïde est une autre cycloïde.

155. On peut démontrer de la manière suivante, par la synthèse, que la développée AA' , fig. 46, est une cycloïde : nous avons

$$\text{arc } LM' + \text{arc } RM' = \pi a,$$

donc

$$\text{arc } LM' = \pi a - \text{arc } RM';$$

d'une autre part,

$$\text{arc } RM' = \text{arc } MR = AR, \text{ art. 148;}$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura

$$\text{arc } LM' = \pi a - AR = AD - AR,$$

ou

$$\text{arc } LM' = LA',$$

ce qui est la propriété de la cycloïde.

De la méthode des infiniment petits.

156. Les notions que nous avons de l'infini, se réduisent à cette proposition : une quantité n'est pas infinie lorsqu'elle est susceptible d'augmentation. Par conséquent, si l'on a $x + a$, et que x devienne infini, il faut supprimer a , autrement ce serait supposer que x peut encore s'augmenter de a , ce qui est contre notre définition. Cette quantité a , qui ne peut être comparée à x , est ce qu'on appelle un infiniment petit, par rapport à x .

Si l'on imagine que dans une fraction, le dénominateur augmente successivement, la fraction diminuera sans cesse jusqu'à ce que le dénominateur devienne infini; et en représentant le signe de l'infini par ce caractère ∞ , la fraction $\frac{a}{\infty}$ sera infiniment petite, par rapport à la quantité finie a .

157. Quoique deux quantités soient infiniment petites, il ne s'ensuit pas que leur rapport soit nul; car, $\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} :: a : b$. On sent d'ailleurs que deux quantités infiniment petites peuvent se contenir comme deux quantités très-grandes : ainsi, dx et dy représentant deux quantités infiniment petites, il suit de ce qui précède, que le rapport $\frac{dy}{dx}$ n'est pas nul, résultat conforme à celui que nous avons obtenu par la considération des limites.

158. Lorsqu'une quantité x est infiniment petite par rapport à une grandeur finie a , le carré x^2 est infiniment petit par rapport à x . En effet, la proportion $a : x :: x : x^2$, nous prouve que x est à a ce que x^2 est

à x . On démontrerait de même, à l'aide de la proportion $x : x^2 :: x^2 : x^3$, que x^2 étant infiniment petit par rapport à x , le terme x^3 doit être infiniment petit par rapport à x^2 ; c'est pour cette raison qu'on a divisé les infiniment petits en différens ordres : ainsi dans les exemples précédens, x est un infiniment petit du premier ordre, x^2 est un infiniment petit du second ordre, x^3 est un infiniment petit du troisième ordre, ainsi de suite.

159. Observons que si x est infiniment petit par rapport à a il en sera de même de x multiplié par une quantité finie b . En effet x pouvant être considéré comme une fraction dont le dénominateur serait infini, on peut représenter x par $\frac{c}{\infty}$: or, que l'on ait $\frac{c}{\infty}$ ou $\frac{bc}{\infty}$, ces quantités n'en sont pas moins nulles par rapport à a .

160. De même qu'un infiniment petit du premier ordre doit être supprimé lorsqu'il est à côté d'une quantité finie, qu'il ne peut augmenter, on doit effacer un infiniment petit du deuxième ordre, qui serait à côté d'un infiniment petit du premier ordre, ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a cette expression

$$a + by + cy^2 + dy^3,$$

et que y soit un infiniment petit du premier ordre, cy^2 en sera un du second, et dy^3 en sera un du troisième : il faut donc effacer dy^3 , parce que dy^3 ne peut augmenter cy^2 ; et comme cy^2 ne peut augmenter by , on l'effacera à son tour; enfin on effacera aussi by , puisque cet infiniment petit du premier ordre ne peut augmenter la quantité finie a , et il restera a .

161. Deux quantités infiniment petites x et y , donnent

pour leur produit un infiniment petit du second ordre. En effet, du produit xy je tire la proportion

$$1 : y :: x^2 : xy,$$

ce qui m'apprend que puisque y est infiniment petit par rapport à 1, xy sera infiniment petit par rapport à x , c'est-à-dire, sera un infiniment petit du second ordre.

162. On prouverait de même que le produit de trois infiniment petits du premier ordre, donne un infiniment petit du troisième ordre.

163. Nous pouvons maintenant expliquer la théorie de la différentiation, d'après la méthode des infiniment petits. Pour cet effet, si on suppose que dans une fonction de x la variable x prenne un accroissement infiniment petit, représenté par dx , ensorte que x devienne $x + dx$, la différence du nouvel état au premier, sera la différentielle de cette fonction.

164. Par exemple, pour trouver la différentielle de ax , cette fonction devenant $a(x + dx) = ax + adx$, si on en retranche ax , il restera adx pour la différentielle.

165. Cherchons encore la différentielle de ax^3 ; il faut donc, de $a(x + dx)^3$, retrancher ax^3 : développant et réduisant, on trouve d'abord $3ax^2dx + 3axdx^2 + adx^3$; cela posé, adx^3 étant un infiniment petit du troisième ordre, ne peut augmenter $3axdx^2$, par conséquent, on effacera adx^3 ; de même $3axdx^2$, qui est un infiniment petit du deuxième ordre, doit être supprimé parce que $3ax^2dx$ est un infiniment petit du premier ordre; et il restera $3ax^2dx$, pour la différentielle.

166. On différenciera d'après le même principe toute autre fonction de x , en ayant le soin de supprimer les in-

finiment petits des ordres supérieurs, ce qui se réduit à ne conserver que le premier terme du développement, ainsi qu'on le fait par la méthode des limites.

Par exemple, pour trouver la différentielle de fx , au lieu d'écrire

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = A + Bh + Ch^2 + \text{etc.},$$

qui dans le cas de la limite donne $\frac{dfx}{dx} dx = Adx$ pour la différentielle, on aurait

$f(x+dx) = fx + Adx + Bdx^2 + Cdx^3 + \text{etc.}$;
retranchant la fonction primitive, il resterait

$$Adx + Bdx^2 + Cdx^3;$$

et comme on devrait supprimer les infiniment petits des ordres supérieurs, on ne conserverait que le terme Adx , qui serait la différentielle cherchée.

167. Pour trouver la différentielle du produit de deux variables, y, z , on supposera que quand x devient $x+dx$, y devienne $y+dy$, et que z devienne $z+dz$. Le produit yz se convertira donc alors en $(y+dy)(z+dz)$; développant et retranchant yz , il restera $yz + zdy + ydz + dydz$. Le dernier terme de ce résultat, étant un infiniment petit du second ordre, devra s'effacer, et l'on aura pour la différentielle de yz , l'expression $yz + zdy$.

168. On déduira ensuite de cette dernière différentielle, celle du produit d'un plus grand nombre de variables, et ensuite celle de x^m , par les procédés que nous avons suivis, lorsque nous avons employé la méthode des limites.

169. La différentielle de a^x s'obtiendra aussi très-facilement, lorsque l'on aura le développement de a^{x+dx} , et ce développement se trouvera comme celui de a^{x+h} ,

art. 36; on cherchera ensuite la valeur de $a^x + dx - a^x$, et, ne conservant que le premier terme, on rejettera les autres comme des infiniment petits d'ordres inférieurs à celui du terme que l'on conserve. De la différentielle de a^x , on déduira ensuite, comme nous l'avons fait, celle de $\log. x$.

170. A l'égard de la différentielle de $\sin x$, on a
 $\sin(x + dx) - \sin x = \sin x \cos dx + \sin dx \cos x - \sin x$
 L'arc x étant infiniment petit,

$$\cos dx = 1 \text{ et } \sin dx = dx;$$

au moyen de ces valeurs, on trouve

$$d. \sin x = dx \cos x.$$

171. Le problème des tangentes a donné en quelque sorte naissance au calcul différentiel : voici de quelle manière on résout ce problème, par la méthode des infiniment petits.

Soient PM et PM' , fig. 47, deux ordonnées infiniment proches, et MO une parallèle à l'axe des x ; la tangente MT pourra être considérée comme le prolongement de l'élément MM' de la courbe, parce que cet élément étant très-petit, est censé être en ligne droite. Nommons AP , x ; PM , y ; l'accroissement de x sera $PP' = dx$, et celui de y sera $MO = dy$. Le triangle infiniment petit MMO étant semblable au triangle MPT , on a

$$MO : MO :: MP : PT,$$

ou

$$dy : dx :: y : PT,$$

donc

$$PT = y \frac{dx}{dy}.$$

On trouvera ensuite la normale, la tangente, et les équations de ces lignes, comme dans les art. 69 et 70.

172. Pour avoir la différentielle d'un arc, on regardera l'arc compris entre les ordonnées PM et $P'M'$, infiniment proches, comme une ligne droite; et alors, en nommant s l'arc total, MM' sera ds , et le triangle rectangle $MM'O$, donnera

$$MM'^2 = MO^2 + M'O^2,$$

ou

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

tirant la racine carrée,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

173. La méthode des infiniment petits, moins satisfaisante pour le raisonnement que celle des limites, compense ce désavantage par la brièveté des opérations, qu'elle peint en quelque sorte à la vue. Comme ces méthodes ont entr'elles une grande analogie, il était utile d'en faire le rapprochement.

Des cas où la formule de Taylor est en défaut.

174. En général, lorsque dans une fonction de x on met $x + h$ à la place de x , la forme de la fonction reste la même, puisque $x + h$ entre partout où était x ; ainsi, lorsque $f(x)$ renferme un radical, $f(x + h)$ doit aussi le renfermer: par exemple, si l'on a

$$fx = bx^3 + \frac{a}{\sqrt{x}},$$

le même radical se trouvera dans l'expression

$$f(x + h) = b(x + h)^3 + \frac{a}{\sqrt{x + h}}.$$

175. Il n'en serait pas toujours de même, si l'on donnait une valeur particulière à x (je veux dire déterminée): par exemple, si $\sqrt{x - a}$ entrait dans fx , il faudrait que $f(x + h)$ contiât le terme

$$\sqrt{x + h - a};$$

or, l'hypothèse de $x = a$ ferait évanouir $\sqrt[3]{x-a}$ qui se trouve dans fx , tandis que la même hypothèse réduirait le terme $\sqrt[3]{x-a+h}$

qui entre dans $f(x+h)$ à $\sqrt[3]{h} = h^{\frac{1}{3}}$; le développement de $f(x+h)$ contiendrait donc alors, un radical qui n'existerait pas dans fx , et ne pourrait se développer suivant les puissances entières de h .

Cette impossibilité se manifesterait par les valeurs infinies que prendraient les coefficients différentiels: par exemple, si l'on avait l'équation

$$y = \sqrt[3]{x-a},$$

on trouverait, en la différenciant,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x-a)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt{(x-a)^2}},$$

et l'on voit que la valeur de ce coefficient différentiel devient infinie, lorsqu'on fait $x = a$.

176. Soit en général,

$$f(a+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \dots Mh^n + Nh^{n+\frac{1}{2}} + \text{etc.} \quad (91)$$

le développement qu'on s'en obtient en faisant $x = a$, et dans lequel $n + \frac{1}{2}$, représente une quantité qui tombe entre n et $n + 1$; on va démontrer que le coefficient différentiel de l'ordre $n + 1$ est infini. Pour cela, en regardant a comme une variable, nous savons, art. 53 et 54, que l'on a

$$\frac{df(a+h)}{da} = \frac{df(a+h)}{dh}, \quad \frac{d^2f(a+h)}{da^2} = \frac{d^2f(a+h)}{dh^2}, \text{etc.} \quad (92).$$

Différencions successivement par rapport à h l'équation (91), et représentons pour abréger par M' , N' , A'' , B'' , etc., ce que devien-

nent alors les coefficients M et N ; nous aurons

$$\frac{df(a+h)}{dh} = B + 2Ch + 3Dh^2 \dots + M'h^{n-2} + N'h^{n+\frac{1}{2}-2} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2 f(a+h)}{dh^2} = 2C + 2.3Dh \dots + M''h^{n-3} + N''h^{n+\frac{1}{2}-3} + \text{etc.},$$

etc. etc. etc. etc.;

remplaçant les premiers membres de ces dernières équations par leurs valeurs données par les équations (92), nous obtiendrons

$$\frac{df(a+h)}{da} = B + 2Ch + 2.3Dh^2 \dots + M'h^{n-1} + N'h^{n+\frac{1}{2}-1} + \text{etc.} \dots (93)$$

$$\frac{d^2 f(a+h)}{da^2} = 2C + 2.3Dh \dots + M''h^{n-2} + N''h^{n+\frac{1}{2}-2} + \text{etc.} \dots (94)$$

etc. etc. etc. etc.

faisant $h = 0$ dans les équations (93), (93) et (94), etc., on a

$$fa = A, \quad \frac{dfa}{da} = B, \quad \frac{d^2 fa}{da^2} = 2C, \text{ etc.}$$

Cela suffit pour déterminer les coefficients A , B , C , etc. de l'équation (91).

Cela posé, d'après l'inspection des équations (93) et (94), on voit que chaque différentiation diminuant n d'une unité, lorsque nous serons arrivés à la n^{e} différentiation, nous aurons

$$\frac{d^n f(a+h)}{da^n} = \dots Ph^{n-n} + Qh^{n-n+\frac{1}{2}} + \text{etc.} = P + Qh^{\frac{1}{2}} + \text{etc.},$$

et, à la différentiation suivante, nous trouverons

$$\frac{d^{n+1} f(a+h)}{da^{n+1}} = Rh^{\frac{1}{2}-1} + \text{etc.}$$

Or, $\frac{1}{2}$ étant moindre que l'unité, $\frac{1}{2} - 1$ est un nombre négatif : on pourra donc écrire ainsi l'équation précédente,

$$\frac{d^{n+1} f(a+h)}{da^{n+1}} = \frac{R + \text{etc.}}{h - \left(1 - \frac{1}{2}\right)}$$

par conséquent, lorsque nous ferons $h = 0$, pour déterminer le coefficient de l'un des termes de l'équation (91), nous trouverons

$$\frac{d^{n+1} f(a+h)}{da^{n+1}} = \frac{R}{0} = \infty;$$

il en sera de même lorsqu'on voudra déterminer les coefficients différentiels d'un ordre supérieur.

Il résulte de ce théorème, que lorsqu'on suit $x = a$ dans le développement de $f(x+h)$, s'il existe une puissance fractionnaire de h dans ce développement, et qu'elle soit comprise entre les termes affectés de h^n et de h^{n+1} , on ne pourra déterminer les termes de la série de Taylor que jusqu'à l'ordre n inclusivement: tous les autres termes deviendront infinis.

177. Une fonction de x représentée par fx étant donnée, si l'on veut déterminer le développement de $f(x+h)$, dans l'hypothèse de $x = a$, il faudra, comme on le suit, calculer les termes de la suite,

$$fx + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.};$$

mais si en faisant ce calcul on trouve que l'un des coefficients différentiels devienne infini dans l'hypothèse de $x = a$, on ne cherchera plus à obtenir le développement de $f(x+h)$ par la série de Taylor; mais voici le procédé qu'il faudra employer. On mettra $x + h$ à la place de x dans fx , alors le terme qui contient $x - a$ au dénominateur, contiendra $x - a + h$, et ne deviendra plus infini lorsqu'on fera $x = a$, mais donnera lieu à un terme affecté d'une puissance fractionnaire de h .

178. Soit, par exemple,

$$fx = 2ax - x^2 + a \sqrt{x^2 - a^2},$$

en différentiant on trouve

$$\frac{dy}{dx} = 2(a-x) + \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

substituant ces valeurs et celles de $\frac{d^2y}{dx^2}$, de $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc., dans la formule de Taylor, art. 55, on obtient

$$f(a+h) = 2ax - x^2 + a \sqrt{x^2 - a^2} \\ + \left(2(a-x) + \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) h + \text{etc.}$$

Or, quand $x = a$, le terme multiplié par h devient infini, donc ce développement n'est plus possible.

Dans ce cas, d'après la règle précédente, on mettra $x + h$ à la place de x dans l'équation

$$fx = 2ax - x^2 + a\sqrt{x^2 - a^2},$$

et l'on trouvera

$$f(x + h) = 2ax + 2ah - x^2 - 2xh - h^2 \\ + a\sqrt{x^2 + 2xh + h^2 - a^2},$$

équation qui dans l'hypothèse de $x = a$, devient

$$f(a + h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{2ah + h^2},$$

on

$$f(a + h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{h} \sqrt{2a + h},$$

développant par la formule du binôme, et représentant, pour abrégé, par les lettres A, B, C , etc., les coefficients donnés par cette formule, on a

$$\sqrt{2a + h} = (2a + h)^{\frac{1}{2}} = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{etc.},$$

substituant, on trouve

$$f(a + h) = a^2 - h^2 + aA\sqrt{h} + aBh\sqrt{h} + aCh^2\sqrt{h} + \text{etc.}$$

179. On voit, par cet exemple, qu'en mettant $x + h$, dans la fonction, et faisant $x = a$: on peut introduire une ou plusieurs puissances fractionnaires de h ; on développe ensuite séparément les termes qui sont susceptibles de l'être, soit par la formule du binôme, soit autrement ; et on substitue ces termes dans la valeur de $f(a + h)$, ce qui en donne le développement.

180. Lorsque x reste indéterminé, le développement de $f(x + h)$ ne peut contenir des termes affectés d'une puissance fractionnaire de h . En effet, supposons que l'on ait

$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 \dots + M\sqrt[3]{h},$$

comme $\sqrt[3]{h}$ est susceptible de trois valeurs, M, N, P , nous aurons

ces trois développemens de $f(x + h)$,

$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 \dots + M,$$

$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 \dots + N,$$

$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 \dots + P.$$

Or, fx devant renfermer les mêmes radicaux que $f(x + h)$, art. 174, il faut que fx ait aussi trois valeurs différentes Q, R, S ; en substituant successivement ces valeurs à la place de fx , on aura donc

$$f(x + h) = Q + ph + qh^2 \dots + M,$$

$$f(x + h) = Q + ph + qh^2 \dots + N,$$

$$f(x + h) = Q + ph + qh^2 \dots + P,$$

$$f(x + h) = R + ph + qh^2 \dots + M,$$

$$f(x + h) = R + ph + qh^2 \dots + N,$$

$$f(x + h) = R + ph + qh^2 \dots + P,$$

$$f(x + h) = S + ph + qh^2 \dots + M,$$

$$f(x + h) = S + ph + qh^2 \dots + N,$$

$$f(x + h) = S + ph + qh^2 \dots + P;$$

de sorte que l'expression $f(x + h)$ étant développée, aurait neuf valeurs différentes, tandis que non développée, elle n'en pourrait avoir qu'autant que fx en comporte, et par conséquent trois dans l'hypothèse actuelle; ainsi on ne peut supposer que le développement de $f(x + h)$ contienne une puissance fractionnaire de h , sans tomber dans une contradiction.

181. Il est facile aussi de démontrer que $f(x + h)$ ne peut contenir dans son développement un terme affecté d'une puissance négative de h , car s'il contenait un terme tel que Mh^{-n} , on aurait

$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 \dots + \frac{M}{h^n};$$

or, en faisant $h = 0$, le premier membre se change en fx , et le second, au lieu de se réduire à fx , devient infini, à cause du terme

$\frac{M}{h^n}$ qu'il renferme.

182. Il en serait de même si le développement contenait un terme

affecté d'un logarithme de h ; car si l'on avait par, exemple, un terme tel que $A \log h$, ce terme, lorsqu'on ferait $h = 0$, deviendrait $A \log 0$; or, le logarithme de 0 est l'infini négatif, le terme $A \log h$ serait donc alors infini:

183. M. Lagrange, qui le premier a démontré les propositions précédentes, a trouvé de la manière suivante le développement de $f(x+h)$, sans employer de calcul différentiel.

Soit $y = f(x+h)$; par la nature de cette fonction, il faut que, lorsqu'on fait $h = 0$, $f(x+h)$ se réduise à fx , et par conséquent que la partie qui contient h dans cette expression, soit un multiple de h . Représentons-la par Ph , nous aurons donc

$$f(x+h) = fx + Ph.$$

P pouvant être aussi une fonction de h , si nous appelons p ce que devient P lorsque $h = 0$, et Qh la partie qui dépend de h , nous aurons encore $P = p + Qh$. En continuant ce raisonnement, on aura cette suite d'équations

$$\begin{aligned} y &= fx + Ph, \\ P &= p + Qh, \\ Q &= q + Rh, \\ \text{etc., etc., etc.} \end{aligned}$$

mettant la valeur de P donnée par la deuxième équation dans la première, il viendra

$$y = fx + ph + Qh^2,$$

mettant la valeur de Q donnée par la troisième équation dans ce résultat, on aura

$$y = fx + ph + qh^2 + Rh^3,$$

et en continuant ainsi, on aura en général

$$y = fx + ph + qh^2 + rh^3 + \text{etc.},$$

ce qui est la formule de Taylor.

ÉLÉMENTS

DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL.

CALCUL INTÉGRAL.

De l'intégration des différentielles monomes.

184. LE calcul intégral a pour objet de trouver la fonction qui étant différenciée a dû produire une différentielle donnée. Pour commencer par le cas le plus simple , nous allons chercher à intégrer l'expression $x^m dx$, qui est la formule générale des différentielles monomes : dans cette vue , nous différencierons l'expression x^{m+1} , et nous trouverons

$$d.x^{m+1} = (m + 1) x^m dx ,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{d.x^{m+1}}{m + 1} = x^m dx ;$$

et comme une constante n'influe pas dans la différentiation , nous pourrons écrire ainsi l'équation précédente :

$$d. \frac{x^{m+1}}{m + 1} = x^m dx ;$$

par conséquent, la quantité qui par la différenciation a donné $x^m dx$, est $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. Pour indiquer cette opération, nous mettrons, avant la différentielle, la caractéristique $\int$ qui signifie somme ou intégrale *, de sorte que nous écrirons

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

185. Concluons cette règle générale : *pour intégrer $x^m dx$, il faut augmenter l'exposant d'une unité et diviser par cet exposant ainsi augmenté et par la différentielle.*

186. Soit par exemple $\frac{adx}{x^3}$, nous aurons donc

$$\int \frac{adx}{x^3} = \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-3+1}}{-3+1} = \frac{ax^{-2}}{-2} = -\frac{a}{2x^2},$$

on trouvera de même que

$$\int dx \sqrt{x^3} = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}.$$

187. Observons que lorsque nous différencions $a + x^m$, nous trouvons $mx^{m-1}dx$, comme si nous n'eussions différencié que x^m ; par conséquent il faudra, en

* Ce mot *somme* pour désigner l'intégrale a été introduit par les anciens géomètres, parce que, d'après la méthode des infiniment petits, ils considéraient une fonction y comme une somme d'accroissements infiniment petits.

Par exemple, on voit que l'ordonnée étant MP , fig. 48, on a

$$MP = ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + a''''M,$$

c'est à dire que y est égal à la somme des accroissements infiniment petits, représentés chacun par dy .

intégrant, ajouter une constante à l'intégrale. Ainsi dans les exemples précédens, nous écrivons :

$$\int \frac{adx}{x^2} = -\frac{a}{2x} + C, \quad \int dx \sqrt{x^3} = \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{5} + C.$$

188. Cette constante C qui doit s'évanouir par la différentiation est en général arbitraire, à moins que par la nature du problème elle ne soit déterminée.

Par exemple, si l'on a l'équation $y = ax^2 - b$, qui est celle d'une parabole CBD , fig. 49, dont l'origine est FIG. 9. en A , et qu'on en tire $dy = 2axdx$, on trouvera en intégrant

$$y = ax^2 + C. \dots (1).$$

Cette équation peut convenir à une infinité de paraboles. Or, si l'on veut que parmi toutes ces paraboles, CBD , CBD' , $C'B'D'$, etc., la courbe qui a pour équation $y = ax^2 + C$, soit celle d'une parabole qui passe par le point E dont les coordonnées sont

$$y = 0, \quad x = +\sqrt{\frac{b}{a}},$$

il faudra qu'en faisant $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$, on ait $y = 0$, ce qui réduira l'équation (1) à

$$0 = b + C,$$

d'où l'on tirera $C = -b$. Substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtiendra

$$y = ax^2 - b,$$

comme on l'avait avant la différentiation.

189. Lorsque la nature du problème ne détermine pas la constante, on peut disposer de cette constante comme

dans l'exemple suivant : ayant trouvé que l'intégrale de $x^m dx$ est

$$y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \dots (2),$$

nous donnerons à x une valeur déterminée b , et le second membre de cette équation deviendra

$$\frac{b^{m+1}}{m+1} + C \dots (3);$$

C étant arbitraire, nous pouvons déterminer cette constante par la condition que l'expression (3) soit nulle, ou ce qui revient au même par la condition qu'on ait $y=0$ lorsque $x=b$, alors l'équation (2) deviendra

$$0 = \frac{b^{m+1}}{m+1} + C,$$

d'où l'on tirera la valeur de C , qui étant substituée dans l'équation (2) nous donnera

$$y = \frac{x^{m+1} - b^{m+1}}{m+1} \dots (4).$$

190. Il n'y a qu'un seul cas qui échappe à la règle de l'article (185) pour intégrer $x^m dx$; c'est celui où $m=-1$, car alors la formule (4) devient

$$y = \frac{x^0 - b^0}{0} = \frac{0}{0},$$

il faudrait donc, dans ce cas, faire usage de la règle de l'art. 80, pour déterminer la vraie valeur de l'intégrale; mais on peut éviter cet inconvénient, en observant que $x^{-1} dx = \frac{dx}{x}$, et que cette expression $\frac{dx}{x}$ est la différentielle de $\log x$:

par conséquent, nous aurons

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

Des différentielles complexes dont l'intégration peut s'effectuer par la règle de l'art. 185.

191. Nous avons vu, art. 28, que la différentielle d'un polynôme se formait de la somme des différentielles de ses termes; réciproquement l'intégrale d'un polynôme sera égale à la somme des intégrales des termes qui le composent.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \int \left(adx - \frac{b dx}{x^2} + x dx \sqrt{x} \right) &= \int adx - \int \frac{b dx}{x^2} \\ &+ \int x^{\frac{3}{2}} dx + C, \end{aligned}$$

ou, en effectuant les opérations,

$$\int \left(adx - \frac{b dx}{x^2} + x dx \sqrt{x} \right) = ax - \frac{b}{x} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$$

Nous n'avons mis ici qu'une constante, parce que chaque terme donnant une constante à l'intégration, nous pouvons représenter la somme de ces constantes par une seule lettre.

192. Tout polynôme tel que $(a + bx + cx^2 + \text{etc.})^n dx$, peut s'intégrer par la même règle, lorsque n est un nombre entier positif. Pour cela, il suffit d'élever le polynôme à la puissance indiquée, et d'intégrer séparément chaque terme.

Par exemple, pour intégrer $(a + bx)^n dx$, nous aurons

$$\begin{aligned}\int (a + bx)^n dx &= \int (a^n dx + 2abx dx + b^2 x^2 dx) \\ &= a^n x + abx^2 + \frac{b^2 x^3}{3} + C.\end{aligned}$$

193. Lorsqu'on a une expression telle que $(Fx)^n dFx$, composée de deux facteurs dont l'un est la différentielle de la partie Fx qui est sous la parenthèse, pour intégrer cette expression, on fera $Fx = z$, par conséquent, $dFx = dz$; substituant, on trouvera

$$(Fx)^n dFx = z^n dz,$$

et en intégrant,

$$\int (Fx)^n dFx = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(Fx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Pour en donner un exemple, soit

$$(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}} (b dx + 2cx dx);$$

comme $b dx + 2cx dx$ est la différentielle de la quantité renfermée entre les parenthèses, on fera

$$a + bx + cx^2 = z,$$

et l'on aura, en différenciant,

$$b dx + 2cx dx = dz;$$

donc

$$(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}} (b dx + 2cx dx) = z^{\frac{1}{2}} dz.$$

L'intégrale de cette expression sera

$$\frac{3}{5} z^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} (a + bx + cx^2)^{\frac{5}{2}} + C.$$

194. Si l'un des facteurs était la différentielle de l'autre à une constante près, l'on pourrait encore intégrer par le même procédé. Soit, par exemple,

$$(a + bx^2)^{\frac{1}{2}} m x dx. \dots (5).$$

Comme je vois que la différentielle de $a + bx^2$, qui est $2bx dx$, ne diffère de $mxdx$ que par la constante, je fais $a + bx^2 = z$, et par conséquent $2bx dx = dz$, d'où je tire $x dx = \frac{dz}{2b}$; substituant ces valeurs dans l'expression (5), j'obtiendrai

$$(a + bx^2)^{\frac{m}{2}} mxdx = \frac{m}{2b} z^{\frac{1}{2}} dz,$$

et, en intégrant, il viendra

$$\int (a + bx^2)^{\frac{m}{2}} mxdx = \frac{m}{3b} z^{\frac{3}{2}} + C = \frac{m}{3b} (a + bx^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

195. La même transformation peut s'appliquer aussi pour rapporter certaines différentielles à des logarithmes:

si l'on avait, par exemple, $\frac{adx}{a+bx}$, en faisant $a + bx = z$, j'en déduirais $dx = \frac{dz}{b}$;

substituant, j'aurais

$$\int \frac{adx}{a+bx} = \int \frac{a}{b} \frac{dz}{z} = \frac{a}{b} \int \frac{dz}{z} = \frac{a}{b} \log z + C,$$

et, en mettant pour z sa valeur,

$$\int \frac{adx}{a+bx} = \frac{a}{b} \log (a + bx) + C.$$

En opérant de même pour $\frac{adx}{a-bx}$, on trouvera que l'intégrale de cette expression est

$$\int \frac{adx}{a-bx} = -\frac{a}{b} \log (a - bx) + C.$$

Des différentielles qui s'intègrent par arcs de cercle.

* 196. Soit, fig. 50, $x = CE$, le sinus dont l'arc CB est z ; nous avons $x = \sin z$; différenciant, il viendra $dx = \cos z dz$, d'où nous tirerons $dz = \frac{dx}{\cos z}$; d'une autre part, l'équation $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ nous donne

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - x^2};$$

substituant cette valeur dans celle de dz , on obtiendra

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

par conséquent, en intégrant,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = z + C. \quad (6).$$

Pour déterminer la constante, supposons donc que lorsque $x = 0$, on ait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0;$$

comme, d'après la fig. 50, l'arc z représenté par CB est nul, en même temps que le sinus x , l'équation (6) se réduira donc dans cette hypothèse à $0 = C$; par conséquent

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc}(\sin = x).$$

197. On peut, de l'intégrale précédente, faire dépendre celle de

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

en effet, en divisant les deux termes de la fraction par a ,
on aura

$$\int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}};$$

cette intégrale étant composée en $\frac{x}{a}$, comme $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
l'est en x , il en résulte que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc} \left(\sin = \frac{x}{a} \right).$$

198. En second lieu, soit z l'arc CD , fig. 50, dont
le cosinus AG est x , nous aurons

$$x = \cos z,$$

et en différenciant,

$$dx = -dz \sin z,$$

d'où l'on tirera

$$dz = -\frac{dx}{\sin z};$$

et, en mettant pour $\sin z$ sa valeur tirée de l'équation

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

on obtiendra

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{1 - \cos^2 z}},$$

ou, parce que $\cos z = x$,

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

et en intégrant, on aura

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc} (\cos = x) + C,$$

ou

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc } DC + C \dots (7).$$

Pour déterminer la constante, supposons que lorsque $x = 0$, $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ soit nul, l'équation (7) se réduit dans ce cas, à

$$0 = \text{arc}(\cos = e) + C \dots (8);$$

or, pour que le cosinus AG de l'arc DC soit nul, il faut que cet arc devienne

$$DB = \frac{1}{2} \text{circ.} = \frac{1}{2} \pi;$$

mettant donc $\frac{1}{2} \pi$, au lieu de $\text{arc}(\cos = 0)$ dans l'équation (8), on a

$$0 = \frac{1}{2} \pi + C,$$

ce qui nous donne

$$C = -\frac{1}{2} \pi;$$

substituant cette valeur dans l'équation (7), on obtient

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{2} \pi - \text{arc } DC\right) = -\text{arc } CB.$$

199. Nous avons vu, art. 45, que

$$d. \text{tang } x = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

si nous faisons $x = \text{tang } z$, nous trouverons

$$dx = \frac{dz}{\cos^2 z},$$

d'où nous tirerons

$$dz = dx \times \cos^2 z;$$

or, la proportion

$$\cos z : 1 :: 1 : \text{sécante } z,$$

donnant

$$\cos z = \frac{1}{\text{séc } z},$$

on aura

$$\cos^2 z = \frac{1}{\text{séc}^2 z} = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 z} = \frac{1}{1 + z^2};$$

substituant cette valeur, nous trouverons

$$dz = dx \frac{1}{1+x^2},$$

et en intégrant, on aura

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = z + C;$$

prenant l'intégrale dans l'hypothèse que cette intégrale s'évanouisse lorsque $x = 0$, z devient nul, et l'on a

$$0 = C,$$

donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc dont la tang. est } x.$$

200. On peut rapporter à cette formule, celle-ci

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2};$$

en divisant par a^2 les deux termes de la fraction, on pourra l'écrire ainsi

$$\int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}},$$

et comme cette intégrale est composée en $\frac{x}{a}$, comme

$\frac{1}{a} \int \frac{dx}{1+x^2}$ l'est en x , nous aurons

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{ arc } \left(\text{tang} = \frac{x}{a} \right).$$

Soit encore x le sinus verse DG . Le cosinus et le sinus verse valant ensemble l'unité, nous aurons $x + \cos z = 1$, et en différenciant,

$$dx = -dz \sin z,$$

d'où l'on tire

$$dz = \frac{dx}{\sin z},$$

or,

$$\begin{aligned}\sin z &= \sqrt{1 - \cos^2 z} = \sqrt{(1 - \cos z)(1 + \cos z)} \\ &= \sqrt{x(2 - x)} = \sqrt{2x - x^2};\end{aligned}$$

substituant on a

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

et en intégrant

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \text{arc}(\sinus\ verse = x).$$

Nous n'ajoutons point de constante, parce qu'en supposant que l'intégrale s'évanouisse quand x est nul, z est aussi nul.

201. Lorsqu'on veut avoir la valeur de l'intégrale pour une valeur déterminée de x , on opère comme dans l'exemple suivant.

Supposons qu'on demande l'intégrale de $\frac{dx}{1+x^2}$, lorsque $x = 7$: le rayon étant 1, la tangente sera donc 7 ; et comme les tables des sinus sont construites avec un rayon de 10 milliards de parties, la tangente relative à ce rayon sera 10 milliards de fois plus grande : par conséquent cette tangente vaudra 7×10 milliards.

Le logarithme de la tangente tabulaire aura donc pour expression,

$$\begin{aligned}\log 10 \text{ milliards} + \log 7 &= 10 + \log 7, \\ &= 10 + 0,845098 = 10,845098.\end{aligned}$$

Cherchant ce logarithme dans les tables des sinus, on verra qu'il répond à un arc de

90°, 96, division décimale,

ou de

$81^{\circ}, 52$, division sexagésimale.

Pour trouver la valeur numérique de cet arc, dans l'hypothèse du rayon $= 1$, nous remarquerons que dans cette hypothèse la circonférence $= 6,283$; par conséquent nous aurons

$$400^{\circ} : 90^{\circ}, 96' :: 6,283 : \text{arc cherché}, = 1,42,$$

ou

$$360^{\circ} : 81^{\circ}, 52' :: 6,283 : \text{arc cherché}, = 1,42.$$

De l'intégration par parties.

202. En prenant la différentielle d'un produit de deux variables, par le procédé indiqué art. 14, on trouve

$$d.uv = u dv + v du;$$

intégrant et transposant, il vient

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

C'est à cette formule que l'on rapporte les différentielles que l'on veut intégrer par parties.

203. Par exemple, si l'on ignorait quelle est l'intégrale de $x^m dx$, on ferait $x^m = u$, $dx = dv$; et l'on aurait

$$\int x^m dx = x^{m+1} - \int x.m x^{m-1} dx = x^{m+1} - m \int x^m dx;$$

réunissant les termes affectés de $x^m dx$, on a en transposant

$$(m + 1) \int x^m dx = x^{m+1},$$

donc

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

204. Soit encore

$$\int dx \log x;$$

je fais

$$\log x = u, \quad dx = dv,$$

et j'ai

$$\begin{aligned} \int dx \log x &= x \log x - \int dx = x \log x - x + C \\ &= (\log x - 1)x + C. \end{aligned}$$

205. Pour dernier exemple, cherchons à intégrer

$$dx \sqrt{a^2 - x^2};$$

en faisant

$$\sqrt{a^2 - x^2} = u \text{ et } dx = dv,$$

nous trouverons d'abord

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \dots (8).$$

Nous chercherons ensuite une autre valeur de

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2};$$

pour cet effet, en multipliant cette dernière expression par

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

nous aurons l'équation identique,

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

et en effectuant la première des intégrations indiquées dans le second membre, nous obtiendrons

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

ajoutant cette équation à l'équation (8), nous trouverons

$$2 \int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right);$$

donc

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C.$$

On voit par ces exemples que lorsqu'en général on a une expression telle que $\int v du$, l'intégration par parties fait dépendre cette intégrale de celle $\int u dv$, et que par conséquent cette méthode d'intégration n'est pas toujours applicable.

De l'intégration par les séries.

206. Soit Xdx une différentielle dans laquelle X représente une fonction de x ; si l'on développe X en une suite

$$Ax^a + Bx^c + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^i + \text{etc.}$$

ordonnée par rapport aux exposans a, c, γ , etc., on aura

$$\begin{aligned} \int Xdx &= \int (Ax^a + Bx^c + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^i + \text{etc.}) dx \\ &= \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{c+1}}{c+1} + \frac{Cx^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \frac{Dx^{\delta+1}}{\delta+1} + \frac{Ex^{i+1}}{i+1} + \text{etc.} + C. \end{aligned}$$

207. Prenons pour exemple $\frac{dx}{a+x}$, qui est la différentielle de $\log(a+x)$; on écrira ainsi cette fraction $\frac{1}{a+x} \times dx$,

* Si l'un des exposans a, c, γ , etc., était égal à -1 , on intégrerait par logarithmes le terme qui en serait affecté.

et il s'agira d'abord de trouver le développement de $\frac{1}{a+x}$, ce que l'on fera au moyen de la division; mais sans effectuer cette opération, on peut déduire le développement cherché d'une formule facile à retenir: c'est celle-ci,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4, \text{ etc.} \quad (9) *$$

En effet, on peut écrire la fraction $\frac{1}{a+x}$ de cette manière

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{a}\right)};$$

alors, pour obtenir le développement de $\frac{1}{1 + \frac{x}{a}}$,

il suffira de changer z en $-\frac{x}{a}$ dans la formule (9), et l'on aura

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.};$$

donc

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{a}}, \text{ ou } \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.};$$

par conséquent,

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.} \right) dx,$$

* Cette formule ayant été trouvée par la division, on pourrait croire qu'il vaudrait mieux diviser de suite 1 par $a+x$; mais j'observe que lorsque la formule proposée est gravée dans la mémoire, il est moins long d'en déduire divers développemens que de recommencer chaque fois le calcul.

et, en intégrant chaque terme en particulier, on obtiendra

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.} + C, \dots (10);$$

et, en observant que le premier membre de cette équation est une différentielle logarithmique, art. 195, on aura

$$\log(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.} + C. \dots (11).$$

Pour déterminer la constante, nous remarquerons que lorsque $x=0$, cette équation se réduit à $\log a = 0 + C$; substituant cette valeur de C , l'équation (11) deviendra

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.} (12)^*$$

208. Pour second exemple, cherchons à intégrer par les

* Observons qu'en déterminant ainsi la constante, on ne la regarde plus comme arbitraire, puisqu'en faisant $x=0$ dans l'équation (11), la constante est nécessairement égale au logarithme de a . Là où cette constante a pris une valeur déterminée, c'est lorsqu'an lieu

de $\int \frac{dx}{a+x}$ nous avons mis $\log(a+x)$: en effet, l'équation

(10) nous montre que $\frac{dx}{a+x}$ est en général la différentielle de

$C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \text{etc.}$; or, la suite $\log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \text{etc.}$,

qui est le développement de $\log(a+x)$, est un cas particulier de la suite précédente: c'est celui où $C = \log a$. Ainsi

lorsqu'on a mis $\log(a+x)$ à la place de $\int \frac{dx}{a+x}$, c'est donc comme si on eût choisi parmi toutes les suites qui sont l'inté-

grale de $\frac{dx}{a+x}$ celle où la constante est égale à $\log a$.

Cette remarque peut s'appliquer aux autres expressions que nous allons intégrer par les séries.

série $\frac{dx}{1+x^2}$: en écrivant ainsi cette différentielle, $\frac{1}{1+x^2} \times dx$, il s'agira de trouver le développement de $\frac{1}{1+x^2}$.

Pour cela, en comparant cette expression à $\frac{1}{1-z}$ nous aurons $z = -x^2$; substituant cette valeur dans l'équation (9), nous trouverons

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \text{etc.} \dots (13);$$

donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.} \dots + C,$$

ou plutôt, art. 199,

$$\text{arc}(\text{tang} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.} + C. (14).$$

Quand $x = 0$, l'arc devenant nul, on a $C = 0$.

209. Si la tangente est plus grande que l'unité, les termes de cette série allant en augmentant, on ne pourra donner une valeur approchée de l'arc; dans ce cas, on obtiendra une série descendante, en opérant ainsi : on fera $x = \frac{1}{x}$ dans l'équation (13), ce qui la changera en

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \text{etc.};$$

multipliant les deux termes du premier membre par x^2 , on aura

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \text{etc.};$$

divisant par x^2 , on obtiendra

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{etc.}^*;$$

* On parviendrait directement au même résultat en divisant 1 par $x^2 + 1$.

donc

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^7} + \text{etc.} \right) dx + C,$$

et, en effectuant l'intégration indiquée,

$$\text{arc}(\text{tang} = x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.} + C \dots (15).$$

Pour trouver la valeur de la constante, nous ne ferons pas $x=0$, car alors les termes du second membre de l'équation (15) deviendraient infinis; mais en faisant $x=\infty$, l'expression $\text{arc}(\text{tang} = x)$ sera égale au quart de la circonférence, et l'équation (15) deviendra $\frac{1}{4}$ circonférence $= 0 + C$; et en représentant par $\frac{1}{2} \pi$ le quart de la circonférence, l'équation (15) nous donnera

$$\text{arc}(\text{tang} = x) = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.}$$

210. Pour intégrer par les séries

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

on développera $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binôme de la manière suivante: on calculera d'abord les coefficients du développement de $(1-x^2)^m$, dans l'hypothèse de $m = -\frac{1}{2}$, en écrivant pour former ces coefficients,

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \text{etc.},$$

et, en changeant m en $-\frac{1}{2}$, ces expressions deviendront

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, \text{etc.};$$

multipliant successivement $-\frac{1}{2}$ par $-\frac{3}{4}$, par $-\frac{5}{6}$, etc.,

on formera les coefficients qu'on mettra à la place de A , de B , de C , etc., dans cette équation

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - Ax^2 + Bx^4 - Cx^6 + \text{etc.},$$

ce qui donnera

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6 + \text{etc.},$$

et en intégrant l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6 + \text{etc.}\right) dx$$

on trouvera

$$\text{arc}(\sin x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \text{etc.} \quad (16)$$

nous ne mettons pas de constante, parce que lorsque $x = 0$, l'arc dont le sinus est x s'évanouit.

211. Il y a des cas où pour déterminer la valeur de la constante, on ne peut faire ni $x = 0$, ni $x = \infty$. Soit, par exemple,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx = (x^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

en posant

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \text{ etc. },$$

et faisant

$$m = -\frac{1}{2},$$

on trouve

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, \text{ etc. }; \quad \cdot$$

d'où l'on conclut, comme dans l'art. 210,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{dx}{x} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{x^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{1}{x^6} + \text{etc.}\right) dx,$$

et en intégrant, on trouvera

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6x^6} - \text{etc.}$$

d'une autre part,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \int \frac{x dx}{x + \sqrt{x^2-1}} + \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-1}} = \log(x + \sqrt{x^2-1}); \end{aligned}$$

donc

$$\log(x + \sqrt{x^2-1}) = \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \text{etc.} \quad (17).$$

Pour déterminer la constante on ne fera pas $x = \infty$, puisqu'alors $\log x$ deviendrait ∞ ; d'une autre part, on n'égale pas x à zéro, car les termes $\log x$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2}$ etc., deviendraient infinis; mais si l'on suppose $x = 1$, l'équation (17) deviendra

$$0 = 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \text{ etc.} + C = 0,$$

ce qui donne

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

212. La formule (16) peut servir à trouver une valeur approchée de la circonférence; car en faisant $x = \frac{1}{2}$, elle se réduit à

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\sin \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \text{etc.}; \end{aligned}$$

or, le sinus qui a pour expression $\frac{1}{2}$, étant égal à la moitié

du côté de l'hexagone régulier, comme ce sinus répond à la douzième partie de la circonférence, nous aurons donc

$$\frac{\text{circonf.}}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^5} + \text{etc.},$$

et par conséquent

$$\text{circonf.} = 12 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^5} \right) + \text{etc.};$$

si l'on prend les 10 premiers termes de la suite

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^1} + \text{etc.},$$

on trouvera

$$0,52359877,$$

donc

$$\frac{1}{2} \text{ circonférence} = 6 (0,52359877) = 3,14159262,$$

valeur dans laquelle l'erreur ne porte que sur le dernier chiffre décimal.

213. Nous avons trouvé, art. 207,

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.}$$

Cette série étant peu convergente, faisons $x = -x$, nous aurons

$$\log(a-x) = \log a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} \text{ etc.};$$

retranchant cette équation de la précédente, cela nous donnera

$$\log(a+x) - \log(a-x) = 2 \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \text{etc.} \right)$$

ou

$$\log \left(\frac{a+x}{a-x} \right) = 2 \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \text{etc.} \right) \dots (18).$$

214. Pour déterminer, par exemple, par cette formule, le logarithme de 2, on supposera

$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{2}{1},$$

et par conséquent

$$a+x=2, a-x=1,$$

donc

$$a = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{2}, x^2 = \frac{1}{4}, \frac{x^3}{a^3} = \frac{1}{9} \text{ etc. ;}$$

substituant, on aura

$$\log 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{243} + \text{etc.} \right).$$

En se bornant aux dix premiers termes de cette série, réduite en décimales, on déterminera la valeur du logarithme de 2; triplant ce logarithme, on aura celui de 2³ ou de 8. Si d'une autre part on calcule par la formule (18), le logarithme de $\frac{10}{8}$, et qu'on ajoute ce lo-

garithme à celui de 8, on aura le logarithme de $\frac{10}{8} \times 8 =$

log 10. On voit que par des procédés analogues la formule (18) donnerait tout autre logarithme; mais il est à observer que ces logarithmes sont des logarithmes népériens. Pour en déduire les logarithmes tabulaires, si nous représentons par La le logarithme tabulaire d'un nombre a , nous aurons $a = 10^{La}$; prenant les logarithmes népériens, cette équation nous donnera

$$\log a = \log 10^{La} = La \log 10;$$

et par conséquent

$$La = \frac{\log a}{\log 10};$$

c'est-à-dire, qu'un logarithme tabulaire d'un nombre est égal au logarithme népérien de ce nombre, divisé par le logarithme népérien de 10.

215. On a trouvé une série encore plus convergente que celle qui nous est donnée par la formule (18) pour déterminer un logarithme. Voici de quelle manière on peut la déduire de cette formule :

en divisant $a + x$ par $a - x$, on trouve

$$\frac{a+x}{a-x} = 1 + \frac{2x}{a-x};$$

représentons par $\frac{\nu}{z}$ la fraction $\frac{2x}{a-x}$, on a l'équation

$$\frac{a+x}{a-x} = 1 + \frac{\nu}{z} = \frac{z+\nu}{z};$$

et, en multipliant par $a - x$, il vient

$$a+x = a-x + \frac{a\nu}{z} - \frac{\nu x}{z};$$

tous les x étant transposés dans le premier membre, on obtient

$$2x + \frac{\nu x}{z} = \frac{a\nu}{z};$$

multipliant par z , on trouve

$$2zx + \nu x = a\nu,$$

et par conséquent,

$$\frac{x}{a} = \frac{\nu}{2z + \nu};$$

substituant les valeurs de $\frac{a+x}{a-x}$ et de $\frac{x}{a}$ dans la formule (18), on a ce résultat

$$\log\left(\frac{z+\nu}{z}\right) = 2\left(\frac{\nu}{2z+\nu} + \frac{\nu^3}{3(2z+\nu)^3} + \frac{\nu^5}{5(2z+\nu)^5} + \text{etc.}\right),$$

et enfin,

$$\begin{aligned} \log(z+\nu) = \log z + 2\left(\frac{\nu}{2z+\nu} + \frac{\nu^3}{3(2z+\nu)^3} \right. \\ \left. + \frac{\nu^5}{5(2z+\nu)^5} + \text{etc.}\right). \end{aligned}$$

Par exemple, pour avoir le logarithme de 2, on fera $v = 1$, $z = 1$, et par conséquent $\log z = 0$; substituant ces valeurs dans la formule précédente, on obtiendra

$$\log 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3(3)^3} + \frac{1}{5(5)^3} + \text{etc.} \right)$$

Il faudra diviser ce logarithme par le logarithme népérien de 10, art. 214, pour avoir le logarithme tabulaire de 2.

De la méthode des fractions rationnelles.

216. Proposons-nous d'intégrer l'expression

$$\frac{Px^m + Qx^{m-1} + \dots + Rx + S}{P'x^n + Q'x^{n-1} + \dots + R'x + S'} dx,$$

dans laquelle le multiplicateur de dx est une fraction rationnelle; nous allons démontrer que dans l'expression donnée on peut toujours supposer que n surpasse m ; car, si cela n'était pas, l'intégration pourrait être ramenée à celle d'une différentielle de même forme, dans laquelle la plus haute puissance de x du dénominateur surpasserait la plus haute puissance de x du numérateur; pour cela il suffirait d'effectuer la division comme dans l'exemple suivant.

Soit

$$\frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^2 + R'x + S'};$$

en divisant d'abord tous les termes par Q' , on aura

$$\frac{\frac{P}{Q'}x^3 + \frac{Q}{Q'}x^2 + \frac{R}{Q'}x + \frac{S}{Q'}}{x^2 + \frac{R'}{Q'}x + \frac{S'}{Q'}};$$

faisons

$$\frac{P}{Q'} = P'', \quad \frac{Q}{Q'} = Q'', \quad \frac{R}{Q'} = R'', \quad \frac{S}{Q'} = S'',$$

$$\frac{R'}{Q'} = R''', \quad \frac{S'}{Q'} = S''',$$

nous aurons

$$\frac{P''x^3 + Q''x^2 + R''x + S''}{x^3 + R'''x + S'''}.$$

On effectuera la division de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} P''x^3 + Q''x^2 + R''x + S'' \quad | \quad x^3 + R'''x + S''' \\ - P''x^3 - R'''P''x - P''S''' \\ \hline 1^{re} \text{ reste. } (Q'' - R'''P'')x^2 + (R'' - P''S''')x + S'' \end{array};$$

représentons par M et par N les coefficients de x^2 et de x ,

le 1^{re} reste devient $Mx^2 + Nx + S''$.

$$\begin{array}{r} \text{Suite de la division} \quad - Mx^2 - M R'''x - MS''' \\ \hline \text{second reste} \quad (N - M R''')x + S'' - MS'''; \end{array}$$

on peut représenter ce dernier reste par $Kx + L$, et alors on a

$$\frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^3 + R'x + S'} dx = (P''x + M) dx + \frac{(Kx + L) dx}{x^3 + R'''x + S''};$$

et en intégrant on obtient

$$\int \frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^3 + R'x + S'} dx = P'' \frac{x^2}{2} + Mx$$

$$+ \int \frac{(Kx + L) dx}{x^3 + R'''x + S''} + C;$$

ainsi la question est ramenée à intégrer

$$\frac{(Kx + L) dx}{x^3 + R'''x + S''}.$$

217. Il résulte de ce qui précède que quelle que soit la

fraction rationnelle que l'on considère, son intégration peut toujours être ramenée, dans le cas le plus général, à celle de

$$\frac{Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \dots + Rx + S}{P'x^n + Q'x^{n-1} + \dots + R'x + S'} dx.$$

En regardant le dénominateur de cette fraction comme le produit d'un nombre n de facteurs, tels que $x - a$, $x - b$, $x - c$, etc.; ces facteurs peuvent être réels ou imaginaires, égaux ou inégaux.

Pour commencer par le cas le plus simple, nous les supposons réels et inégaux, et alors nous opérerons comme dans les exemples suivants.

218. Proposons-nous d'abord d'intégrer $\frac{adx}{x^2 - a^2}$: décomposant le dénominateur en ses facteurs, on écrira

$$\frac{adx}{x^2 - a^2} = \frac{adx}{(x - a)(x + a)},$$

et l'on supposera

$$\frac{adx}{(x - a)(x + a)} = \left(\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a} \right) dx \dots (19).$$

A et B sont deux constantes qu'il s'agit de déterminer. Pour cet effet, réduisant le second membre au même dénominateur, on obtiendra

$$\frac{adx}{(x - a)(x + a)} = \frac{(Ax + Aa + Bx - Ba) dx}{(x - a)(x + a)}.$$

Supprimant le diviseur commun $(x - a)(x + a)$, et le facteur dx il restera

$$a = Ax + Aa + Bx - Ba \dots (20),$$

et, en ordonnant par rapport à x , on aura

$$(A + B)x + (A - B - 1)a = 0.$$

x ayant une valeur indéterminée, ainsi que le suppose * la différentielle proposée, cette équation a lieu, quel que soit x ; par conséquent, d'après la méthode des coefficients indéterminés, on égalera séparément à zéro les coefficients des différentes puissances de x ; ou, ce qui revient au même, on égalera entr'eux les termes qui dans l'équation (20) contiennent les mêmes puissances de x , et l'on aura

$$A + B = 0, \quad (A - B - 1)a = 0;$$

ces équations donnent

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (19), on aura donc

$$\int \frac{adx}{x^2 - a^2} = \frac{\frac{1}{2} dx}{x - a} - \frac{\frac{1}{2} dx}{x + a},$$

et en intégrant, on trouvera

$$\int \frac{adx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \log(x - a) - \frac{1}{2} \log(x + a) + C,$$

et par conséquent,

$$\int \frac{adx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \log \frac{x - a}{x + a} + C = \log \left(\frac{x - a}{x + a} \right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Pour second exemple, prenons la fraction $\frac{a^3 + bx^3}{a^2x - x^3} dx$: les facteurs du dénominateur sont x et $a^2 - x^2$, et comme $a^2 - x^2$ se décompose en $(a - x) \times (a + x)$, les facteurs simples du dénominateur sont x , $a - x$, et $a + x$; donc l'expression à intégrer est

$$\frac{a^3 + bx^3}{x(a - x)(a + x)} dx:$$

* En effet, la caractéristique d , qui précède x , annonce que x est considéré comme variable.

je fais

$$\frac{a^3 + bx^3}{x(a-x)(a+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a-x} + \frac{C}{a+x} \dots (21);$$

réduisant ces fractions au même dénominateur, il vient

$$\frac{a^3 + bx^3}{x(a-x)(a+x)} = \frac{Aa^2 - Ax^2 + Bax + Bx^2 + Cax - Cx^2}{x(a-x)(a+x)};$$

égalant entr'eux les coefficients des mêmes puissances de x , on aura

$$B - A - C = b, \quad Ba + Ca = 0, \quad Aa^2 = a^3.$$

La dernière de ces équations nous donne $A = a$, ce qui réduit la première à $B - C = a + b$.

Cette équation étant combinée avec la seconde, on obtient

$$B = \frac{a+b}{2}, \quad C = -\frac{a+b}{2};$$

mettant les valeurs de A , de B et de C , dans l'équation (21), on trouve

$$\frac{a^3 + bx^3}{a^2x - x^3} dx = \frac{adx}{x} + \frac{a+b}{2(a-x)} dx - \frac{a+b}{2(a+x)} dx;$$

donc, en intégrant,

$$\int \frac{a^3 + bx^3}{a^2x - x^3} dx = a \log x - \frac{(a+b)}{2} \log(a-x) + \frac{(a+b)}{2} \log(a+x) + C$$

* Pour prendre l'intégrale de $\frac{a+b}{2(a-x)} dx$, comme la différentielle de $a-x$ est $-dx$, il faut écrire

$$-\frac{(a+b)}{2} \times -\frac{dx}{a-x},$$

et l'on voit que l'intégrale sera $-\frac{(a+b)}{2} \log(a-x) + C$.

$$\begin{aligned}
&= a \log x - \frac{(a+b)}{2} [\log(a-x) + \log(a+x)] + C, \\
&= a \log x - \frac{(a+b)}{2} \log(a-x)(a+x) + C, \\
&= a \log x - \frac{(a+b)}{2} \log(a^2 - x^2) + C, \\
&= a \log x - (a+b) \log \sqrt{a^2 - x^2} + C.
\end{aligned}$$

219. Pour troisième exemple, soit $\frac{3x-5}{x^2-6x+8} dx$.

Comme il s'agit d'abord de décomposer le dénominateur en facteurs du premier degré, nous remarquerons que si l'on a une équation de même forme, et représentée par $x^2 - 6x + 8 = 0$, et qui soit satisfaite par les valeurs $x=2$ et $x=4$, on sera en droit de conclure qu'elle équivaut au produit $(x-2)(x-4) = 0$. Or, en effectuant la multiplication, on voit que quelque valeur que l'on attribue à x , le produit sera toujours $x^2 - 6x + 8$; donc, lorsqu'au lieu de x nous mettrons x , nous aurons encore $(x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$.

Par conséquent, quelle que soit la valeur du polynôme $x^2 - 6x + 8$, il peut se décomposer en facteurs comme s'il était égal à zéro.

Ayant donc trouvé que les racines de l'équation $x^2 - 6x + 8 = 0$, sont 2 et 4, nous écrirons

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+8} dx = \frac{A dx}{x-2} + \frac{B dx}{x-4} \dots (22),$$

et en supprimant le facteur commun dx , ce que nous aurons toujours le soin de faire à l'avenir, nous trouverons, après avoir réduit au même dénominateur,

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+8} = \frac{Ax-4A+Bx-2B}{x^2-6x+8};$$

égalant entr'eux les coefficients des mêmes puissances de x ,
on obtiendra ces équations de condition,

$$-5 = -4A - 2B, \quad 3 = A + B,$$

d'où nous tirerons

$$B = \frac{7}{2}, \quad A = -\frac{1}{2};$$

mettant ces valeurs dans l'équation (22), on trouvera

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-5}{x^2-6x+8} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x-4} + C \\ &= \frac{7}{2} \log(x-4) - \frac{1}{2} \log(x-2) + C. \end{aligned}$$

220. Prenons encore pour exemple

$$\frac{x dx}{x^2 + 4ax - b^2};$$

égalant le dénominateur à zéro et résolvant l'équation,
on trouve

$$x^2 + 4ax - b^2 = (x + 2a + \sqrt{4a^2 + b^2})(x + 2a - \sqrt{4a^2 + b^2}).$$

Pour simplifier, représentons ce dernier produit par

$$(x + K)(x + L),$$

nous supposons donc

$$\frac{x}{x^2 + 4ax - b^2} = \frac{A}{x + K} + \frac{B}{x + L};$$

réduisant le second membre au même dénominateur,
nous trouverons

$$\frac{x}{x^2 + 4ax - b^2} = \frac{Ax + AL + Bx + BK}{x^2 + 4ax - b^2},$$

d'où l'on tire

$$AL + BK = 0, \quad A + B = 1,$$

par conséquent

$$A = \frac{K}{K-L}, \quad B = -\frac{L}{K-L};$$

donc

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 4ax - b^2} = \frac{K}{K-L} \log(x+K) - \frac{L}{K-L} \log(x+L) + C.$$

221. En général, soit

$$\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Rx + S}{x^m + Q'x^{m-1} \dots + R'x + S'} dx$$

une fraction rationnelle dans laquelle les facteurs du premier degré du dénominateur sont supposés inégaux, on résoudra d'abord l'équation

$$x^m + Q'x^{m-1} \dots + R'x + S' = 0;$$

et ayant trouvé qu'elle est le produit des facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, etc., on écrira

$$\begin{aligned} & \frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Rx + S}{x^m + Q'x^{m-1} \dots + R'x + S'} \\ &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \text{etc.} \end{aligned}$$

En réduisant au même dénominateur le second membre de cette équation, chaque terme du numérateur de l'une des fractions devra être multiplié par le produit des dénominateurs des autres, c'est-à-dire, par un polynôme en x de l'ordre $m - 1$; donc le second membre de cette équation sera un polynôme composé de m termes.

Il en résulte que si on égale entr'eux les coefficients des mêmes puissances de x , on aura m équations de condition pour déterminer les coefficients A, B, C ; etc. Ces coefficients étant connus, on n'aura plus qu'à intégrer une suite de termes tels que

$$\frac{A dx}{x-a}, \quad \frac{B dx}{x-b}, \quad \text{etc.};$$

l'intégrale cherchée sera donc

$$A \log(x-a) + B \log(x-b) + \text{etc.} + C.$$

222. La méthode que nous avons suivie lorsque les racines du dénominateur sont inégales, ne peut servir si parmi ces racines, que nous supposons toujours réelles, il y en a d'égales. En effet, nous avons vu que, dans l'hypothèse des racines inégales, on pouvait écrire

$$\begin{aligned} & \frac{Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)} \\ &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e}; \end{aligned}$$

si plusieurs de ces racines étaient égales; si, par exemple, on avait $a = b = c$, l'équation précédente deviendrait

$$\begin{aligned} & \frac{Px^4 + \text{etc.}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)} \\ &= \frac{A+B+C}{x-a} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e}. \end{aligned}$$

Alors, en réduisant le second membre au même dénominateur, $A+B+C$ pouvant être considérés comme une seule constante A , on voit que les trois constantes A, D et E ne pourraient suffire pour établir les

cinq équations de condition qu'on doit obtenir en égalant entr'eux les coefficients des mêmes puissances de x .

223. Pour éviter cet inconvénient, cherchons à décomposer la fraction

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^2(x-d)(x-e)}$$

en un autre assemblage de fractions, qui réduites au même dénominateur, puissent la reproduire.

Supposons donc

$$\begin{aligned} & \frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^2(x-d)(x-e)} \\ &= \frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^2} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e}. \end{aligned}$$

De cette manière, en réduisant le second membre de cette équation au même dénominateur, nous aurons un polynome en x , du 4^e degré, qui renfermera cinq constantes arbitraires; ce qui suffira pour établir l'identité des termes affectés des mêmes puissances de x . Maintenant je vais démontrer que le terme

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^2}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{A'}{(x-a)^2} + \frac{B'}{(x-a)} + \frac{C'}{(x-a)},$$

A', B', C' , étant des constantes indéterminées. Pour le démontrer, j'observe qu'on ne change point la valeur de la fraction

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^2},$$

si on ajoute au terme Cx^2 la quantité $-2Cax + Ca^2$, et

si on retranche en même temps cette même quantité des autres termes : en opérant ainsi on trouvera

$$\frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3} = \frac{A + Bx + 2Cax - Ca^2 + C(x-a)^2}{(x-a)^3};$$

et si, pour simplifier, nous représentons $A - Ca^2$ par A' et $B + 2Ca$ par B' , l'équation précédente deviendra

$$\frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3} = \frac{A' + B'x + C(x-a)^2}{(x-a)^3};$$

ajoutant $B'a - B'a$, dans le numérateur, on aura

$$\frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3} = \frac{A' + B'(x-a) + C(x-a)^2}{(x-a)^3},$$

et en faisant $A' + B'a = A''$, on obtiendra

$$\begin{aligned} \frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3} &= \frac{A'' + B'(x-a) + C(x-a)^2}{(x-a)^3}, \\ &= \frac{A''}{(x-a)^3} + \frac{B'(x-a)}{(x-a)^3} + \frac{C(x-a)^2}{(x-a)^3}, \end{aligned}$$

et, en supprimant les facteurs communs, on aura enfin

$$\frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3} = \frac{A''}{(x-a)^3} + \frac{B'}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-a},$$

résultat de la forme prescrite, puisque A'' , B' , C sont des constantes.

Cette démonstration pouvant s'appliquer à une équation d'un degré plus élevé, concluons qu'en général, on peut supposer

$$\begin{aligned} &\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Rx + S}{(x-a)^m} \\ &= \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A'}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A''}{(x-a)^{m-2}} + \dots + \frac{A^{m-1}}{(x-a)}. \end{aligned}$$

Il résulte de ce qui précède que pour intégrer l'expression

$$\frac{Px^4 + \text{etc.}}{(x-a)^3 (x-d) (x-e)} dx,$$

on supposera

$$\frac{Px^4 + \text{etc.}}{(x-a)^3 (x-d) (x-e)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{A'}{(x-a)^2} + \frac{A''}{(x-a)} + \frac{D}{(x-d)} + \frac{E}{(x-e)};$$

réduisant ensuite les fractions au même dénominateur, on déterminera les constantes A, A', A'', D, E , etc., par le procédé que nous avons déjà employé, et l'on aura ensuite à trouver les intégrales des expressions suivantes :

$$\frac{E}{x-e} dx, \frac{D}{x-d} dx, \frac{A''}{x-a} dx, \frac{A'}{(x-a)^2} dx, \frac{A}{(x-a)^3} dx.$$

Les trois premières s'intègrent par logarithmes; à l'égard des deux autres, comme dx est la différentielle de l'expression $x-a$, renfermée entre les parenthèses, nous supposons, art. 193, $x-a=z$, et nous aurons

$$\int \frac{A' dx}{(x-a)^2} = \int \frac{A' dz}{z^2} = \int A' z^{-2} dz = -\frac{A'}{z} = -\frac{A'}{x-a},$$

$$\int \frac{A'' dx}{(x-a)^3} = \int \frac{A'' dz}{z^3} = \int A'' z^{-3} dz = -\frac{A''}{2z^2} = -\frac{A''}{2(x-a)^2};$$

donc enfin

$$\begin{aligned} \int \frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^3 (x-d) (x-e)} dx &= dx \frac{A'}{x-a} - \frac{A''}{2(x-a)^2} \\ &+ A^3 \log(x-a) + D \log(x-d) + E \log(x-e) \\ &+ \text{constante.} \end{aligned}$$

224. Prenons pour exemple la fraction

$$\frac{2ax \, dx}{(x+a)^3};$$

nous aurons

$$\frac{2ax}{(x+a)^3} = \frac{A}{(x+a)^3} + \frac{A'}{x+a};$$

réduisant le deuxième membre au même dénominateur, et supprimant ce dénominateur commun, il reste

$$2ax = A + A'x + A'a,$$

d'où l'on déduira des équations de condition

$$2a = A, \quad A + A'a = 0;$$

elles donnent

$$A = 2a, \quad A' = -2a,$$

par conséquent

$$\frac{2ax \, dx}{(x+a)^3} = -\frac{2a^3 \, dx}{(x+a)^3} + \frac{2a \, dx}{(x+a)}, \dots (23).$$

Pour obtenir l'intégrale, remarquons que dx étant la différentielle de $x+a$, nous pouvons supposer $x+a = z$; donc

$$\int \frac{2ax \, dx}{(x+a)^3} = -2a^3 \frac{dz}{z^3} + 2a \frac{dz}{z};$$

intégrant la première fraction du second membre par la règle de l'art. 185, et l'autre par logarithmes, nous obtiendrons

$$\int \frac{2ax \, dx}{(x+a)^3} = \frac{2a^3}{z} + 2a \log z + C,$$

et, en remettant la valeur de z ,

$$\int \frac{2ax \, dx}{(x+a)^3} = -\frac{2a^3}{a+x} + 2a \log(a+x) + C.$$

225. Pour second exemple, cherchons l'intégrale de

$$\frac{x^3 dx}{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3};$$

en égalant à zéro le dénominateur, on voit que tous les termes se détruisent dans l'hypothèse de $x = a$; donc l'équation $x^3 - ax^2 - a^2x + a^3$, est divisible par $x - a$. En effectuant cette division, on trouve pour quotient $x^2 - a^2$; ainsi la quantité à intégrer est

$$\begin{aligned} \frac{x^3 dx}{(x^3 - a^3)(x - a)} &= \frac{x^3 dx}{(x + a)(x - a)(x - a)} \\ &= \frac{x^3 dx}{(x - a)^2(x + a)}. \end{aligned}$$

Nous supposons donc

$$\frac{x^3}{(x - a)^2(x + a)} = \frac{A}{(x - a)^2} + \frac{A'}{(x - a)} + \frac{B}{x + a} \dots (24);$$

réduisant le second membre au même dénominateur, on obtient

$$\frac{x^3}{(x - a)^2(x + a)} = \frac{A(x + a) + A'(x^2 - a^2) + B(x - a)^2}{(x + a)(x - a)^2};$$

développant et égalant entr'eux les coefficients des mêmes puissances de x , on obtient ces équations de condition

$$A + B = 1, A - 2Ba = 0, Aa - Aa^2 + Ba^2 = 0 \dots (25).$$

Si on multiplie la première par a^2 , et qu'on l'ajoute à la troisième, on aura

$$Aa + 2Ba^2 = a^2;$$

celle-ci, à son tour, étant ajoutée à la seconde des équations (25) multipliée par a , on trouve

$$a^2 = 2Aa \text{ et } A = \frac{1}{2} a,$$

mettant cette valeur dans la seconde des équations (25), on obtient

$$B = \frac{1}{4},$$

et par conséquent la première donne

$$A = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

au moyen des valeurs de ces constantes l'équation (24) multipliée par dx , devient

$$\frac{x^2 dx}{(x-a)^2 (x+a)} = \frac{a dx}{2(x-a)^2} + \frac{3 dx}{4(x-a)} + \frac{dx}{4(x+a)}.$$

Pour intégrer $\frac{a dx}{2(x-a)^2}$, nous ferons $x - a = z$, et cette expression deviendra $\frac{a dz}{2z^2} = \frac{a z^{-2}}{2} dz$, et aura pour intégrale, art 185,

$$-\frac{a z^{-1}}{2} = -\frac{a}{2z} = -\frac{a}{2(x-a)};$$

donc

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-a)^2 (x+a)} = -\frac{a}{2(x-a)} + \frac{3}{4} \log(x-a) + \frac{1}{4} \log(x+a) + \text{constante}.$$

226. On opérera de la même manière, si dans le dénominateur il y a plusieurs groupes de racines égales. Soit, par exemple,

$$\frac{a dx}{(x^2-1)^2} = \frac{a dx}{(x-1)^2 (x+1)^2};$$

nous poserons

$$\frac{a}{(x-1)^2 (x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A'}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{x+1} + (2),$$

et, en réduisant au même dénominateur, nous trouvons

$$\frac{a}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + A'(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)^2 + B'(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2};$$

supprimant les dénominateurs et développant les numérateurs, nous trouverons ces équations de condition

$$\begin{aligned} A' + B' &= 0, \\ A + A' + B - B' &= 0, \\ 2A - A' - 2B - B' &= 0, \\ A - A' + B + B' &= a. \end{aligned}$$

La première de ces équations réduit la troisième à $2A' - 2B = 0$, donc $A' = B$; la seconde réduit la quatrième à $2A + 2B = a$; de ces équations, on conclut $A = \frac{a}{4} = B$, par conséquent la quatrième devient $B' - A' = \frac{1}{2}a$; cette équation étant combinée avec la première, on trouve

$$A' = -\frac{a}{4}, \quad B' = \frac{a}{4}.$$

Au moyen des valeurs de ces constantes, la différentielle proposée devient

$$\frac{1}{4}a \left[\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{dx}{x-1} + \frac{dx}{x+1} \right].$$

On intégrera les deux premières de ces expressions par les règles des art. 193 et 185, et les autres par logarithmes, et l'on trouvera

$$\int \frac{adx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}a \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \log(x-1) + \log(x+1) \right] + C.$$

227. Avant que d'examiner le cas où le dénominateur contient des racines imaginaires, faisons quelques observations sur ces sortes de quantités : considérons d'abord l'équation

$$x^2 + px + q = 0. \dots (27);$$

et cherchons les conditions nécessaires pour que les racines de cette équation soient imaginaires : en résolvant cette équation on trouve

$$x = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

La première condition nécessaire pour que cette valeur de x soit imaginaire, est que le dernier terme de l'équation (27) soit positif; car, s'il était négatif, l'expression $-q$, qui est sous le radical, changerait de signe, et le radical n'affectant alors que des quantités positives, x ne pourrait être imaginaire. Cette condition étant remplie, x sera imaginaire, si q surpasse $\frac{1}{4} p^2$. L'excès de q sur $\frac{1}{4} p^2$ étant alors une quantité essentiellement positive, représentons-le par β^2 , puisqu'un carré est toujours positif : nous aurons

$$q = \frac{1}{4} p^2 + \beta^2;$$

faisons $\frac{p}{2} = \alpha$ pour éviter les fractions, cette équation deviendra

$$q = \alpha^2 + \beta^2;$$

substituons ces valeurs de p et de q dans la proposée, nous trouverons

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0. \dots (28).$$

Cette équation étant résolue donne

$$x = -\alpha \pm \beta \sqrt{-1} \dots (29);$$

ses deux racines sont donc

$$-\alpha + \beta \sqrt{-1} \text{ et } -\alpha - \beta \sqrt{-1},$$

ce qui montre que ces racines sont disposées par couples, de telle sorte que l'une étant connue fait connaître l'autre en changeant le signe de la partie imaginaire.

228. En général, une équation peut avoir plusieurs couples de racines imaginaires, et chaque couple donnera lieu à un facteur du second degré de la forme

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 \dots (30).$$

229. Quelquefois les racines imaginaires sont égales au signe près, c'est ce qui arrive lorsque $\alpha = 0$; alors, l'une des racines est $\beta \sqrt{-1}$, et l'autre $-\beta \sqrt{-1}$, et le facteur (30) du second degré se réduit à $x^2 + \beta^2$.

230. Pour donner un exemple d'une équation dont les racines sont imaginaires, je prends l'équation

$$x^3 - 6ax + 10a^2 = 0;$$

en la résolvant, je trouve

$$x = 3a \pm \sqrt{-a^2} = 3a \pm a \sqrt{-1};$$

comparant cette valeur de x avec l'équation (29), j'ai

$$-\alpha = 3a, \quad \beta = a;$$

donc, dans le cas présent, l'équation (30) devient

$$x^2 - 6ax + 9a^2 + a^2.$$

231. Au reste, quand on a une équation telle que

$$x^3 + 4x + 12 = 0;$$

dont les racines sont imaginaires *, on peut la comparer immédiatement à la formule (30), et l'on a $2\alpha = 4$, donc $\alpha^2 = 4$; si l'on retranche 4 de 12, il reste 8 pour β^2 , et l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$x^2 + 4x + 4 + 8 = 0.$$

Le terme 8, à la vérité, n'est pas un carré parfait; mais, alors, on le regarde comme celui de $\sqrt{8}$.

232. Occupons-nous maintenant de l'intégration des fractions rationnelles dont les dénominateurs renferment des facteurs imaginaires; et, pour commencer par le cas le plus simple, considérons celui où il n'y a qu'une couple de racines imaginaires dans le dénominateur: supposons, par exemple, qu'après avoir décomposé le dénominateur en ses facteurs, on ait trouvé

$$\frac{P + Qx + Rx^2 + Sx^3 \text{ etc.}}{(x-a)(x-b) \dots (x-h)(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \zeta^2)} dx,$$

on égalera, comme nous l'avons déjà fait, art. 223, cette fraction à cette suite de termes,

$$\frac{A dx}{x-a} + \frac{B dx}{x-b} \dots + \frac{H dx}{x-h} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \zeta^2} dx,$$

et ayant déterminé les constantes $A, B, \dots H, M, N$, par le procédé que nous avons employé, tous ces termes, hors le dernier, s'intégreront par logarithmes; à l'égard de ce dernier, il s'intégrera de la manière suivante:

On remarquera que $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ étant un carré parfait, le terme à intégrer peut s'écrire ainsi:

$$\frac{Mx + N}{(x + \alpha)^2 + \zeta^2} dx.$$

* On le reconnaît lorsque les conditions de l'art. 227 sont remplies.

Et, en faisant $x + \alpha = z$, il devient

$$\frac{Mz + N - M\alpha}{z^2 + \epsilon^2} dz;$$

et, en nommant P la partie constante $N - M\alpha$, il se réduit à

$$\frac{Mz + P}{z^2 + \epsilon^2} dz;$$

cette expression se décompose en celles-ci :

$$\frac{Mz dz}{z^2 + \epsilon^2} + \frac{P dz}{z^2 + \epsilon^2}.$$

Pour intégrer la première nous observerons que $z dz$ étant la différentielle de $z^2 + \epsilon^2$, à un facteur constant près, on peut, art. 194, supposer $z^2 + \epsilon^2 = y$, ce qui nous donnera, en différenciant,

$$z dz = \frac{dy}{2};$$

substituant ces valeurs, nous obtiendrons $\frac{M dy}{2y}$, dont l'intégrale sera

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} \log y &= \frac{M}{2} \log (z^2 + \epsilon^2) = \frac{M}{2} \log [(x + \alpha)^2 + \epsilon^2] \\ &= \frac{M}{2} \log (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2) = M \log (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= M \log \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2}. \end{aligned}$$

À l'égard de l'expression $\frac{P dz}{z^2 + \epsilon^2}$, en divisant ses deux termes par ϵ^2 , elle peut se mettre sous cette forme

$$\frac{P}{\epsilon} \cdot \frac{\frac{dz}{\epsilon}}{\frac{z^2}{\epsilon^2} + 1}$$

et l'on voit que son intégrale est

$$\frac{P}{\zeta} \arctan \left(\tan = \frac{z}{\zeta} \right) = \left(\frac{N - Ma}{\zeta} \right) \arctan \left(\tan = \frac{x + a}{\zeta} \right);$$

donc, enfin,

$$\int \frac{Mx + Na}{x^3 + 2ax + a^3 + \zeta^2} dx = M \log \sqrt{x^3 + 2ax + a^3 + \zeta^2} + \frac{N - Ma}{\zeta} \arctan \left(\tan = \frac{x + a}{\zeta} \right) \dots (31).$$

233. Prenons pour exemple la fraction $\frac{(a + bx)}{x^3 - 1} dx$: le dénominateur ayant $x - 1$ pour facteur, nous trouverons l'autre facteur par la division, et la fraction proposée pourra se mettre sous la forme

$$\frac{(a + bx)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} dx;$$

$x^2 + x + 1$ étant le produit de deux facteurs imaginaires, ainsi qu'on peut le reconnaître en résolvant l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, nous écrirons

$$\frac{(a + bx)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1};$$

réduisant au même dénominateur et opérant comme nous l'avons indiqué, nous trouverons

$$A = \frac{a + b}{3}, M = -\frac{(a + b)}{3}, N = \frac{b - 2a}{3};$$

nous décomposerons ensuite le facteur $x^2 + x + 1$ en facteurs simples, en le comparant à l'expression (30), ce qui nous donnera

$$2x = 1, \quad \alpha^3 + \beta^3 = 1,$$

et par conséquent

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{4}};$$

substituant ces valeurs et celles de M et de N , dans l'équation (31), qui nous donne la seconde partie de l'intégrale, et observant que la première est

$$\int \frac{A dx}{x-1} = \frac{a+b}{3} \log(x-1),$$

nous trouverons

$$\begin{aligned} \int \frac{(a+bx)dx}{x^3-1} &= \frac{a+b}{3} \log(x-1) - \frac{(a+b)}{3} \log \sqrt{x^2+x+1} \\ &+ \frac{(b-a)}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right] + C. \end{aligned}$$

234. Lorsque la fraction aura dans son dénominateur des facteurs imaginaires égaux, elle contiendra un ou plusieurs facteurs du second degré de la forme $(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^p$, suivant qu'elle renfermera un ou plusieurs groupes de facteurs imaginaires égaux. Le facteur

$$(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^p$$

correspondra à cette suite de termes :

$$\begin{aligned} &\frac{H + Kx}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^p} + \frac{H' + K'x}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^{p-1}} \\ &+ \frac{H'' + K''x}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^{p-2}} \dots + \frac{H_i + K_i x}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2} \dots (32), \end{aligned}$$

et ayant opéré de même pour les autres groupes de facteurs égaux, on déterminera les constantes

$H, K, H', K', H'', K'', \dots H_i, K_i$, etc., comme précédemment.

On multipliera ensuite par dx , et il ne s'agira plus que d'intégrer chaque terme séparément, ce que l'on pourra toujours faire lorsqu'on saura intégrer le premier

terme de la suite (32) multiplié par dx , puisque tous les autres sont de même forme. Pour cet effet, nous écrirons ainsi ce terme :

$$\frac{H + Kx}{[(x + \alpha)^2 + \epsilon^2]^p} dx;$$

faisant $x + \alpha = z$, il deviendra

$$\frac{H - K\alpha + Kz}{(\epsilon^2 + z^2)^p} dz;$$

et, en nommant M la partie constante $H - K\alpha$, on aura à intégrer

$$\frac{M + Kz}{(\epsilon^2 + z^2)^p} dz.$$

Cette fraction peut se décomposer en ces deux-ci :

$$\frac{Kzdz}{(\epsilon^2 + z^2)^p} + \frac{Mdz}{(\epsilon^2 + z^2)^p}.$$

Pour intégrer la première, comme zdz est la différentielle de $z^2 + \epsilon^2$, à un facteur constant près, nous supposons $z^2 + \epsilon^2 = y$, et nous aurons $zdz = \frac{1}{2}dy$; substituant on obtiendra

$$\begin{aligned} \int \frac{Kzdz}{(\epsilon^2 + z^2)^p} &= \int \frac{1}{2} K \frac{dy}{y^p} = \frac{1}{2} K \int y^{-p} dy = \frac{1}{2} \frac{Ky^{-p+1}}{1-p} \\ &= \frac{1}{2} K \frac{(\epsilon^2 + z^2)^{-p+1}}{1-p} = \frac{1}{2} \frac{K}{(1-p)} \frac{1}{(\epsilon^2 + z^2)^{p-1}} + C. \end{aligned}$$

Il nous reste à intégrer $\frac{Mdz}{(\epsilon^2 + z^2)^p}$, ou plutôt,

$$M(\epsilon^2 + z^2)^{-p} dz. \dots (33).$$

Pour parvenir à cette intégrale, nous la déduirons de celle de $\int (\epsilon^2 + z^2)^p dz$, de la manière suivante :
en diminuant l'exposant p d'une unité, c'est diviser par

$\xi^2 + z^2$, par conséquent, en multipliant en même temps par la même quantité, nous aurons l'équation identique

$$(\xi^2 + z^2)^p dz = (\xi^2 + z^2)^{p-1} (\xi^2 + z^2) dz,$$

et, en exécutant la multiplication indiquée dans le second membre, il viendra

$$(\xi^2 + z^2)^p dz = \xi^2 (\xi^2 + z^2)^{p-1} dz + (\xi^2 + z^2)^{p-1} z^2 dz;$$

intégrant, on aura

$$\int (\xi^2 + z^2)^p dz = \xi^2 \int (\xi^2 + z^2)^{p-1} dz + \int (\xi^2 + z^2)^{p-1} z^2 dz. \quad (34).$$

Des deux intégrales qui sont dans le second membre de cette équation, nous laisserons la première sous le signe qui l'indique; à l'égard de la seconde, nous y appliquerons l'intégration par partie. Pour cela, en multipliant et en divisant par 2 l'expression $(\xi^2 + z^2)^{p-1} z^2 dz$, nous l'écrirons ainsi :

$$\frac{z}{2} (\xi^2 + z^2)^{p-1} 2z dz \dots (35);$$

alors $(\xi^2 + z^2)^{p-1} 2z dz$ sera la différentielle de $\frac{(\xi^2 + z^2)^p}{p}$, de sorte que l'expression (35) deviendra

$$\frac{z}{2} \cdot d \frac{(\xi^2 + z^2)^p}{p};$$

en la comparant à la formule

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

nous ferons

$$u = \frac{z}{2}, \quad v = \frac{(\xi^2 + z^2)^p}{p},$$

et nous trouverons

$$\int \frac{z}{2} (\xi^2 + z^2)^{p-1} 2z dz = \frac{z}{2} \frac{(\xi^2 + z^2)^p}{p} - \int \frac{(\xi^2 + z^2)^p}{p} \frac{dz}{2}.$$

Substituant cette valeur à la place du dernier terme de l'équation (34), et mettant les constantes en dehors du signe d'intégration, cette équation (34) deviendra

$$\int (\xi^2 + z^2)^p dz = \xi^2 \int (\xi^2 + z^2)^{p-1} dz \\ + \frac{z}{2} \frac{(\xi^2 + z^2)^p}{p} - \frac{1}{2p} \int (\xi^2 + z^2)^p dz ;$$

transposant le dernier terme dans le premier membre, et réduisant, on trouvera

$$\frac{(1+2p)}{2p} \int (\xi^2 + z^2)^p dz = \frac{z}{2} \frac{(\xi^2 + z^2)^p}{p} + \xi^2 \int (\xi^2 + z^2)^{p-1} dz ;$$

on tire de cette équation

$$\int (\xi^2 + z^2)^{p-1} dz = -\frac{z}{2p\xi^2} (\xi^2 + z^2)^p + \frac{1+2p}{2p\xi^2} \int (\xi^2 + z^2)^p dz ;$$

faisant $p-1 = -p$, et par conséquent $p = 1-p$, on a enfin

$$\int (\xi^2 + z^2)^{-p} dz \\ = -\frac{z}{2(1-p)\xi^2} (\xi^2 + z^2)^{-p+1} + \frac{3-2p}{(2-2p)\xi^2} \int (\xi^2 + z^2)^{-(p-1)} dz. (36)$$

Au moyen de cette formule, on fera dépendre l'intégrale de $(\xi^2 + z^2)^{-p} dz$, d'une autre, dans laquelle la valeur numérique de l'exposant, au lieu d'être p , sera moindre d'une unité; par la même formule on fera dépendre ensuite l'intégrale de $(\xi^2 + z^2)^{-(p-1)}$, de celle de $(\xi^2 + z^2)^{-(p-2)}$, ainsi de suite; de sorte qu'après chaque substitution l'exposant de la partie intégrale diminuant d'une unité, il ne restera plus en dernier lieu qu'à intégrer l'expression

$$(\xi^2 + z^2)^{-1} dz = \frac{dz}{\xi^2 + z^2} ;$$

or, nous avons vu, art. 200, que l'intégrale de cette expression était

$$\frac{1}{c} \arctan \left(\tan = \frac{z}{c} \right).$$

On s'arrête à l'intégrale $\int (c^2 + z^2)^{-1} dz$, et non à celle où l'exposant est 0; car si dans la formule (36) on faisait $p = 1$, le terme

$$\frac{-z}{2(1-p)c^2} (c^2 + z^2)^{-p+1}, \text{ deviendrait infini.}$$

235. Il résulte de cette théorie que l'intégration de toute fraction rationnelle ne dépend que de ces trois sortes de formules

$$1^\circ. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}; \quad 2^\circ. \int \frac{dx}{x+a} = \log(x+a);$$

$$3^\circ. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\tan = \frac{x}{a} \right);$$

c'est pourquoi on dit que toute fraction rationnelle peut toujours s'intégrer ou algébriquement ou par logarithmes ou par arcs de cercle, ou par le concours de ces moyens.

236. Nous terminerons cette théorie par un exemple qui renferme tous les cas: soit donc la fraction rationnelle

$$\frac{Px^m + P'x^{m-1} + P''x^{m-2} + \text{etc.}}{RR' \dots SS' \dots TT' \dots UU' \dots} dx,$$

dans laquelle on a

$$\left. \begin{aligned} R &= x - a, \\ R' &= x - b, \\ R'' &= x - c, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \text{facteurs réels inégaux;}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= (x - e)^{m_1} \\ S' &= (x - d)^n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \text{facteurs réels égaux;}$$

$$\left. \begin{aligned} T &= x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \zeta^2, \\ T' &= x^2 + 2\alpha' x + \alpha'^2 + \zeta'^2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \text{facteurs imaginaires inégaux;}$$

$$\left. \begin{aligned} U &= (x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \zeta_1^2)^p, \\ U' &= (x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_2^2 + \zeta_2^2)^q, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \text{facteurs imaginaires égaux;}$$

on supposera

$$\frac{P_x^m + P'_1 x^{m-1} + P''_1 x^{m-2} + \text{etc.}}{RR'R''\dots SS'S'\dots TT'\dots UU'\dots} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \dots$$

$$+ \frac{E}{(x-e)^m} + \frac{E'}{(x-e)^{m-1}} + \frac{E''}{(x-e)^{m-2}} + \dots + \text{etc.}$$

$$+ \frac{F}{(x-f)^n} + \frac{F'}{(x-f)^{n-1}} + \frac{F''}{(x-f)^{n-2}} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{G + Hx}{x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \zeta_1^2} + \frac{K + Lx}{x^2 + 2\alpha'_1 x + \alpha'^2_1 + \zeta'^2_1} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{M + Nx}{(x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \zeta_1^2)^p} + \frac{M' + N'x}{(x^2 + 2\alpha'_1 x + \alpha'^2_1 + \zeta'^2_1)^{p-1}} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{P + Qx}{(x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_2^2 + \zeta_2^2)^q} + \frac{P' + Q'x}{(x^2 + 2\alpha'_2 x + \alpha'^2_2 + \zeta'^2_2)^{q-1}} + \text{etc.};$$

et ayant réduit au même dénominateur, on opérera comme nous l'avons expliqué.

De l'intégration des fonctions irrationnelles.

237. Lorsque dans une expression différentielle qui contient des radicaux, on peut à l'aide d'une transformation, faire évanouir les radicaux, l'intégration sera ramenée à celle des fractions rationnelles.

On peut toujours faire évanouir les radicaux qui n'affectent que des quantités monomes : le procédé que l'on emploiera, pour y parvenir, sera le même que celui dont nous allons faire usage dans l'exemple suivant :

$$\text{soit } \frac{\sqrt{x-3a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x}} dx, \text{ ou plutôt } \frac{x^{\frac{1}{2}}-3a}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}} dx,$$

on réduira les exposans fractionnaires au même dénominateur, et ayant trouvé que le dénominateur commun est 6, on supposera $x = z^6$, alors on aura

$$\sqrt{x} = z^3, \sqrt[3]{x} = z^2, dx = 6z^5 dz;$$

substituant ces valeurs on trouvera

$$\frac{\sqrt{x-3a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x}} dx = \frac{z^3-3a}{z^3-z^3} z^5 dz = \frac{z^6-3az^3}{1-z} dz;$$

on intégrera cette expression par la méthode des fractions rationnelles, et on substituera ensuite dans l'intégrale, la valeur de z en x .

238. Il n'en est pas de même lorsque le radical affecte un polynome; cependant on peut intégrer toute expression en x , qui renferme $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, c'est-à-dire toute expression de la forme

$$F(x, \sqrt{A+Bx+Cx^2}) dx.$$

Il peut arriver deux cas, le terme Cx^2 sera positif ou né-

gatif; s'il est positif, on écrira ainsi le radical

$$\sqrt{C} \sqrt{\frac{A}{C} + \frac{Bx}{C} + x^2};$$

si ce terme est négatif, nous le regarderons comme le produit de $+C$ par $-x^2$, et alors le radical pourra se mettre sous cette forme

$$\sqrt{C} \sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x - x^2};$$

pour simplifier, faisons

$$\frac{A}{C} = a, \quad \frac{B}{C} = b,$$

nous aurons donc à intégrer ces deux expressions

$$F(x, \sqrt{a + bx + x^2}) dx, \quad F(x, \sqrt{a + bx - x^2}) dx.$$

Occupons-nous d'abord de la première.

Notre but étant d'obtenir par une transformation les valeurs de x , de dx et de $\sqrt{a + bx + x^2}$, en fonction rationnelle d'une nouvelle variable z , nous supposons

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z + x^* \dots (37),$$

parce qu'en élevant au carré, les termes en x^2 se détruisant il nous restera entre z et x , une équation du premier degré de laquelle on pourra tirer les valeurs de x et de dx , en fonction rationnelle de z . Élevant donc l'équation (37) au carré, et supprimant les termes en x^2 , on obtient

$$a + bx = 2xz + z^2. \dots (38);$$

* On pourrait aussi élever le radical à $z - x$, puisqu'en élevant les deux membres au carré, les termes en x^2 s'évanouiraient également.

d'où l'on tire

$$x = \frac{z^2 - a}{b - 2z} \dots (39);$$

au moyen de cette valeur, l'équation (37) devient

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{z^2 - a}{b - 2z} + z;$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\sqrt{a + bx + x^2} = - \frac{(z^2 - bz + a)}{b - 2z} \dots (40).$$

Il nous reste à déterminer dx en z : pour cela nous différencierons l'équation (38), et nous obtiendrons

$$b dx = 2x dz + 2z dx + 2z dz,$$

d'où nous tirerons

$$(b - 2z) dx = 2(x + z) dz,$$

et si l'on élimine le radical entre l'équation (37) et l'équation (40), on aura

$$x + z = - \frac{(z^2 - bz + a)}{b - 2z};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouvera

$$(b - 2z) dx = - \frac{2(z^2 - bz + a)}{b - 2z} dz,$$

et

$$dx = - \frac{2(z^2 - bz + a)}{(b - 2z)^2} dz \dots (41).$$

239. Prenons pour exemple

$$\frac{dx}{x \sqrt{A + Bx + Cx^2}},$$

nous écrirons ainsi cette expression

$$\frac{dx}{\sqrt{C} \times x \sqrt{a + bx + x^2}},$$

en faisant $\frac{A}{C} = a$ et $\frac{B}{C} = b$. L'équation (41) divisée par

l'équation (40), nous donnera ; après avoir réduit ,

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \frac{2dz}{b - 2z},$$

et , en divisant par l'équation (39), on aura

$$\frac{dx}{x\sqrt{a + bx + x^2}} = \frac{2dz}{z^2 - a};$$

multipliant les dénominateurs par $\sqrt{C}$, cette équation deviendra

$$\frac{dx}{x\sqrt{C}\sqrt{a+bx+x^2}}, \text{ ou } \frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{2dz}{(z^2-a)\sqrt{C}},$$

fraction qui s'intègre par la méthode des fractions rationnelles , puisqu'on peut regarder $\sqrt{C}$ comme une constante ordinaire.

240. Pour second exemple , prenons $dx \sqrt{m^2 + x^2}$: en comparant le radical à celui de la formule (40), nous avons $a = m^2$, $b = 0$, et en mettant ces valeurs dans les équations (40) et (41), nous trouverons

$$\sqrt{m^2 + x^2} = \frac{z^2 + m^2}{2z}, dx = - \frac{(z^2 + m^2)}{2z^2} dz,$$

donc

$$dx \sqrt{m^2 + x^2} = - \frac{(z^2 + m^2)^2}{4z^3} dz.$$

Lorsqu'on aura intégré cette expression rationnelle , on y substituera la valeur de z en x .

241. La méthode précédente ne peut être employée lorsque Cx^2 est négatif , car en opérant comme ci-dessus , on aurait

$$\begin{aligned} \sqrt{A+Bx-Cx^2} &= \sqrt{C} \sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x - x^2} \\ &= \sqrt{C} \sqrt{a+bx-x^2}. \end{aligned}$$

Or, si nous supposons $\sqrt{a + bx - x^2} = x + z$, en élevant au carré les deux membres de cette équation, le terme en x^2 ne s'évanouirait pas, et alors la valeur de x en z serait irrationnelle. Pour traiter ce cas, nous remarquerons préliminairement que le polynôme $a + bx - x^2$, est toujours décomposable en facteurs réels du premier degré *.

Soient α et α' , les racines de l'équation $x^2 - bx - a = 0$, nous aurons, d'après la propriété des équations

$$x^2 - bx - a = (x - \alpha)(x - \alpha'),$$

et par conséquent, en changeant les signes,

$$a + bx - x^2 = -(x - \alpha)(x - \alpha') = (x - \alpha)(\alpha' - x);$$

substituant cette valeur dans le radical, nous supposons

$$* \sqrt{(x - \alpha)(\alpha' - x)} = (x - \alpha) z \dots (42);$$

* Pour le démontrer, nous écrirons ainsi ce polynôme :

$$-(x^2 - bx - a),$$

et nous trouverons les facteurs de $x^2 - bx - a$, en égalant à zéro cette expression, ce qui nous donnera

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + a};$$

donc, par la propriété des équations

$$\begin{aligned} & x^2 - bx - a \\ &= \left(x - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}\right) \left(x - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}\right); \end{aligned}$$

et puisque, par hypothèse, a représente une quantité positive, les facteurs qui composent ce produit ne peuvent être imaginaires. Au reste, sans résoudre l'équation $x^2 - bx - a = 0$, on peut conclure, d'après le signe de son dernier terme, art. 227, qu'elle a ses racines réelles.

cette équation élevée au carré nous donne

$$(x - \alpha)(x' - x) = (x - \alpha)^2 z^2,$$

et, en supprimant le facteur commun, on a

$$x' - x = (x - \alpha) z^2. \dots (43),$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{\alpha' + \alpha z^2}{z^2 + 1},$$

donc

$$x - \alpha = \frac{\alpha' + \alpha z^2}{z^2 + 1} - \alpha,$$

et, en réduisant au même dénominateur,

$$x - \alpha = \frac{\alpha' - \alpha}{z^2 + 1}. \dots (44);$$

cette valeur étant mise dans le second membre de l'équation (42), on obtient

$$\sqrt{(x - \alpha)(x' - x)} = \frac{\alpha' - \alpha}{z^2 + 1} z. \dots (45).$$

A l'égard de dx , il suffit de différencier l'équation (44) pour en obtenir la valeur en z , et nous trouverons

$$dx = - \frac{2(\alpha' - \alpha)}{(z^2 + 1)^2} z dz. \dots (46).$$

242. Appliquons ce procédé à l'exemple

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}};$$

nous diviserons l'équation (46) par l'équation (45), et nous aurons

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = - \frac{2(\alpha' - \alpha)z}{(z^2 + 1)^2 z \frac{(\alpha' - \alpha)}{z^2 + 1}} dz = - \frac{2dz}{z^2 + 1};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -2 \arcs (\text{tang} = z) + C$$

ou, en remettant la valeur de z , donnée par l'équation (42),

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} &= C - 2 \arcs (\text{tang} = \frac{\sqrt{(x-a)(a'-x)}}{x-a}) \\ &= C - 2 \arcs (\text{tang} = \sqrt{\frac{a'-x}{x-a}}). \end{aligned}$$

243. Prenons encore pour exemple $dx \sqrt{2ax-x^2}$: en comparant ce radical à celui de l'équation (42) nous aurons $a=0$, $a'=2a$, et les équations (45) et (46) deviennent

$$\sqrt{x(2a-x)} = \frac{2ax}{z^2+1}, \quad dx = -\frac{4az}{(z^2+1)^2} dz;$$

ces équations multipliées l'une par l'autre, nous donnent

$$dx \sqrt{2ax-x^2} = -\frac{8a^2 z^2 dz}{(z^2+1)^2},$$

expression qui s'intègre par la méthode des fractions rationnelles.

De l'intégration des différentielles binomes.

244. Nous avons vu qu'un moyen très-fécond pour intégrer des fonctions qui contiennent des radicaux, était de transformer ces fonctions en d'autres rationnelles, pour pouvoir y appliquer la méthode des fractions rationnelles.

La difficulté est de trouver la transformation qui peut être employée pour chaque cas; nous avons indiqué celle qui convient lorsque les radicaux ne sont que des trinomes; ces sortes d'expressions étant très-fréquentes dans

l'analyse, il était utile de faire connaître la transformation propre à les rendre rationnelles. Nous avons aussi donné un procédé général pour rendre rationnelles les fonctions qui ne contiennent que des monômes élevés à des puissances fractionnaires; il convient donc d'examiner maintenant si, à l'aide d'une transformation, on peut rendre rationnelles les expressions binomes qui sont affectées d'exposans fractionnaires.

245. La formule générale des expressions binomes est

$$x^{m-1} (a + bx^n)^p dx^*.$$

Si p est un nombre entier, cette formule s'intégrera par l'art. 192; ainsi nous supposons p égal à la fraction $\frac{p}{q}$, et nous aurons

$$x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx. \dots (47).$$

Pour rendre cette expression rationnelle, nous ferons

$$a + bx^n = z^q. \dots (48),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(a + bx^n)^{\frac{1}{q}} = z,$$

* L'expression binome $Ax^r + Bx^s$, étant un cas particulier de celle-ci : $(Ax^r + Bx^s)^p$, c'est à cette dernière formule que nous rapporterons les différentielles binomes; nous pourrions l'écrire ainsi :

$$[x^r (A + Bx^{s-r})]^p = x^{rp} (A + Bx^{s-r})^p,$$

et, en faisant $s - r = n$, $rp = m - 1$, elle deviendra

$$x^{m-1} (A + Bx^n)^p.$$

On a préféré remplacer rp par $m - 1$, plutôt que par m , parce que les conditions d'intégrabilité seront plus faciles à exprimer, comme nous le verrons.

et par conséquent

$$(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} = x^p. \dots (49).$$

L'équation (48) étant différenciée nous donne

$$bnx^{n-1} dx = qz^{q-1} dz. \dots (50);$$

la même équation (48) étant résolue par rapport à x , on a

$$x = \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{1}{n}};$$

donc, en élevant les deux membres de cette équation à la puissance m , on obtient

$$x^m = \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n}};$$

différenciant les deux membres, mettant les constantes en dehors, et divisant par m , on trouve

$$x^{m-1} dx = \frac{q}{nb} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} - 1} z^{q-1} dz;$$

substituant dans l'équation (47) cette valeur ainsi que celle

de $(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$, donnée par l'équation (49), on a enfin

$$\frac{q}{nb} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} - 1} z^{q-1} dz, \dots (51).$$

Cette expression est rationnelle lorsque $\frac{m}{n}$ est un nombre entier positif; car alors $\frac{z^q - a}{b}$ est élevé à une puissance entière, et l'on peut réduire l'expression (51) à un nombre limité de monomes, qui peuvent s'intégrer chacun par l'art. 185 ou par l'art. 190. Si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier

négatif, l'expression (51) devenant aussi rationnelle, on peut l'intégrer par la méthode des fractions rationnelles.

246. Prenons pour exemple l'expression

$$x^5 (a + bx^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Dans ce cas, nous aurons

$$p = 2, q = 3, m - 1 = 5, \text{ ou } m = 6, n = 2;$$

par conséquent la condition d'intégrabilité est satisfaite. Substituant ces valeurs dans l'expression (51), nous aurons à intégrer

$$\frac{3}{2b^{\frac{1}{2}}} (z^3 - a)^{\frac{3}{2}} z^4 dz = \frac{3}{2} \frac{z^{10}}{b^{\frac{1}{2}}} dz - \frac{3a}{b^{\frac{1}{2}}} z^7 dz + \frac{3a^2}{2b^{\frac{1}{2}}} z^4 dz,$$

donc

$$\int x^5 (a + bx^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3z^{11}}{22b^{\frac{1}{2}}} - \frac{3az^8}{8b^{\frac{1}{2}}} + \frac{3a^2 z^5}{10b^{\frac{1}{2}}} + C;$$

on substituera ensuite dans ce résultat la valeur de z en x .

247. Pour obtenir une autre condition d'intégrabilité, écrivons l'expression (47) de la manière suivante :

$$x^{m-1} \left[\left(\frac{a}{x^n} + b \right) x^n \right]^{\frac{p}{q}} dx,$$

et, en élevant les facteurs du produit $\left(\frac{a}{x^n} + b \right) x^n$, à la puissance $\frac{p}{q}$, nous aurons

$$x^{m-1} x^{\frac{np}{q}} \left(\frac{a}{x^n} + b \right)^{\frac{p}{q}} = x^{m + \frac{np}{q} - 1} (ax^{-n} + b)^{\frac{p}{q}} dx.$$

Or, d'après la démonstration précédente, il faut, pour que cette quantité soit intégrable, qu'on ait

$$\frac{m + \frac{np}{q}}{n} = \text{nombre entier},$$

ou, en exécutant la division indiquée,

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \text{nombre entier.}$$

248. Prenons pour exemple l'expression $x^4 dx \sqrt[3]{a+bx^3}$.
En écrivant ainsi cette expression

$$x^{5-1} (a + bx^3)^{\frac{1}{3}} dx,$$

on a

$$m = 5, n = 3, p = 1, q = 3,$$

par conséquent,

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2,$$

donc cette quantité est intégrable. Dans ce cas, on aura

$$x^{5-1} (a + bx^3)^{\frac{1}{3}} dx = x^{5-1} \left(\frac{a}{x^3} + b \right)^{\frac{1}{3}} x dx,$$

et en réunissant les exposants de x , cette expression deviendra

$$x^3 (ax^{-3} + b)^{\frac{1}{3}} dx \dots (52);$$

faisant $ax^{-3} + b = z^3$, nous trouverons

$$(ax^{-3} + b)^{\frac{1}{3}} = z, \quad x^{-3} = \frac{z^3 - b}{a},$$

ou

$$\left(\frac{a}{x^3} + b \right)^{\frac{1}{3}} = z, \quad \frac{1}{x^3} = \frac{z^3 - b}{a};$$

la dernière de ces équations nous donne

$$x^3 = \frac{a}{z^3 - b},$$

d'où l'on tire, par la différentiation,

$$x^3 dx = - \frac{az^2 dz}{(z^3 - b)^2};$$

multipliant entre elles ces deux dernières équations, on a

$$x^5 dx = - \frac{a^2 z^3 dz}{(z^3 - b)^2};$$

cette valeur de $x^5 dx$, et celle de $(ax^{-3} + b)^{\frac{5}{2}}$ étant substituées dans l'expression (52), on trouve enfin

$$x^5 (ax^{-3} + b)^{\frac{5}{2}} dx = - \frac{a^2 z^3 dz}{(z^3 - b)^2},$$

expression qui est intégrable par la méthode des fractions rationnelles.

Des formules de réduction des différentielles binomes.

249. Lorsque l'équation $x^{m-1} dx (a + bx^n)^p$ ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité que nous venons de prescrire, on peut y appliquer l'intégration par parties, de la manière suivante :

En comparant la formule $\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p$, au premier membre de l'équation

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

nous supposons

$$(a + bx^n)^p = u, \quad x^{m-1} dx = dv, \quad \text{donc} \quad v = \frac{x^m}{m};$$

et nous aurons, en mettant les constantes en dehors du signe d'intégration,

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^p \frac{x^m}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} x^{n-1} dx,$$

ou, en réunissant les exposans de x ,

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^p \frac{x^m}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} (a + bx^n)^{p-1} dx. (53);$$

d'une autre part, on a l'équation identique

$$(a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p-1} (a + bx^n),$$

et, en exécutant la multiplication indiquée, cette équation donne

$$(a + bx^n)^p = a(a + bx^n)^{p-1} + bx^n(a + bx^n)^{p-1};$$

multipliant les deux membres par $x^{m-1}dx$, on trouve

$$\int x^{m-1}dx(a + bx^n)^p = a \int x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-1} + b \int x^{m+n-1}dx(a + bx^n)^{p-1} \dots (54).$$

Amoyen de cette équation on peut éliminer le dernier terme de

l'équation (53) : car si on multiplie l'équation (54) par $\frac{pn}{m}$ et qu'on

l'ajoute à l'équation (53), on trouvera

$$\left(1 + \frac{pn}{m}\right) \int x^{m-1}dx(a + bx^n)^p = (a + bx^n)^p \frac{x^m}{m} + \frac{pna}{m} \int x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-1};$$

multipliant par m , et divisant ensuite par le facteur constant du premier membre, on obtiendra

$$\int x^{m-1}dx(a + bx^n)^p = \frac{x^m}{(m+pn)}(a + bx^n)^p + \frac{pna}{m+pn} \int x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-1} \dots (55).$$

Par cette formule on pourra donc faire dépendre l'intégrale de $x^{m-1}dx(a + bx^n)^p$, d'une autre dans laquelle l'exposant qui affecte la parenthèse sera moindre d'une unité.

Si dans cette formule on met ensuite $p-1$ à la place de p , l'intégrale de $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-1}$ dépendra de celle de $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-2}$; par un même procédé, celle-ci, à son tour, dépendra de celle de $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-3}$, et ainsi de suite : de sorte que l'exposant de la parenthèse sera successivement $p, p-1, p-2, p-3, p-n$. (Par n , nous représentons le plus grand nombre contenu dans p que nous supposons fractionnaire.) Si l'on peut obtenir l'intégrale de $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-n}$, on aura celle où l'exposant de $a + bx^n$ est plus fort d'une unité, et ainsi de suite, jusqu'à l'intégrale de $x^{m-1}dx(a + bx^n)^p$, qu'on obtiendra de cette manière, en un nombre limité de termes algébriques.

250. Si p était négatif, l'équation (55) donnerait

$$\int x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-1} = \frac{-x^m(a + bx^n)^p + (m+pn) \int x^{m-1}dx(a + bx^n)^p}{pna},$$

faisant $p-1=p$, on aurait

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{-x^m (a+bx^n)^{p+1} + [m+(p+1)]n \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)na} \dots (56),$$

formule dans laquelle si l'on fait p négatif, l'intégrale proposée dépendra d'une autre dans laquelle l'exposant de la parenthèse sera plus près de zéro d'une unité.

251. On peut aussi diminuer l'exposant de x , hors de la parenthèse. Pour cet effet, on égalera entre eux les seconds membres des équations (53) et (54), ce qui donnera

$$\begin{aligned} (a+bx^n)^p \frac{x^m}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} (a+bx^n)^{p-1} dx \\ = a \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1} + b \int x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^{p-1}, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$\left(b + \frac{pnb}{m}\right) \int x^{m+n-1} (a+bx^n)^{p-1} dx = (a+bx^n)^p \frac{x^m}{m} - a \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1},$$

et par conséquent,

$$\int x^{m+n-1} (a+bx^n)^{p-1} dx = \frac{(a+bx^n)^p x^m - ma \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1}}{bm + pn b};$$

faisons $m+n=m$, $p-1=p$, cette équation deviendra

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{(a+bx^n)^{p+1} x^{m-n} - (m-n)a \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p \dots (57).$$

Au moyen de cette formule, l'intégrale dépendra d'une autre dans laquelle la partie x^{m-1} , hors de la parenthèse, deviendra x^{m-n-1} ; cette seconde intégrale dépendra à son tour d'une troisième, dans laquelle la partie hors de la parenthèse sera $m-2n-1$: en continuant ainsi, les exposants de x hors de la parenthèse seront successivement $m-1$, $m-n-1$, $m-2n-1$, $m-3n-1$, ..., $m-rn-1$. (Par rn , on entend le plus grand multiple renfermé dans m .)

A la dernière de ces opérations, l'exposant de x hors de la parenthèse, dans le second membre de l'équation de réduction, sera

donc $m - r - 1$; par conséquent x , dans le premier membre de cette équation, aura pour exposant $m - (r - 1)n - 1$: ainsi en faisant $m = m - (r - 1)n$, dans la formule (57), et en représentant par X la partie intégrée, cette formule nous donnera

$$\int x^{m-(r-1)n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{X-(m-rn)a \int x^{m-rn-1} dx (a+bx^n)^p}{b \{ m-(r-1)n+pn \}} \dots (58).$$

Si rn est égal à m , le coefficient $m - rn$ est zéro, ce qui fait évanouir dans le second membre de l'équation précédente la partie affectée du signe d'intégration, et il reste

$$\int x^{m-(r-1)n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{X}{bn(1+p)}.$$

Cette intégrale étant déterminée exactement, toutes les autres le sont à leur tour, par conséquent, la formule proposée est alors intégrable.

252. Nous avons supposé que m était positif dans la formule (57) qui diminue l'exposant hors de la parenthèse ; pour avoir celle qui convient au cas où m serait négatif, nous tirerons de la formule (57),

$$\int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{(a+bx^n)^{p+1} x^{m-n} - b(m+np) \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p}{(m-n)a} ;$$

faisant $m - n = m$, on aura

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{(a+bx^n)^{p+1} x^m - b(m+n+np) \int x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^p}{ma} \quad (59).$$

Au moyen de cette formule l'exposant hors de la parenthèse, étant négatif, l'intégrale dépendra d'une autre dans laquelle la valeur de cet exposant sera moindre de n unités ; car, l'exposant de x hors de la parenthèse, dans le second membre de l'équation (59), étant $m + n - 1$, si l'on remplace m par sa valeur négative, que nous représenterons par m' , cet exposant deviendra $-(m' - n) - 1$, tandis que celui de x , hors de la parenthèse, dans le premier membre, sera $-m' - 1$; et en ne considérant que les valeurs numériques de ces exposants, il est certain que $-(m' - n) - 1$, surpassera $-m' - 1$, de n unités.

253. Pour donner une application de ces formules, soit

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

J'écris ainsi cette expression : $x^m dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; et en la comparant à celle-ci : $x^{m-1} dx (a+bx^n)^p$, j'aurai

$$m-1=m, \text{ on } m=m+1, a=1, b=-1, n=2, p=-\frac{1}{2}.$$

L'exposant de la parenthèse ayant une valeur numérique moindre que l'unité, nous chercherons à diminuer l'exposant qui est hors de la parenthèse, et en conséquence nous substituerons les valeurs précédentes dans la formule (57), ce qui la changera en celle-ci :

$$\int x^m dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x^{m-1} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{m} + \frac{m-1}{m} \int x^{m-2} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

ou

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1} \sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (60).$$

Si l'on fait successivement

$$m=m-2, \text{ on a } \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-3} \frac{\sqrt{1-x^2}}{m-2} + \frac{m-3}{m-2} \int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$m=m-4, \dots \int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-5} \frac{\sqrt{1-x^2}}{m-4} + \frac{m-5}{m-4} \int \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$m=m-6, \dots \int \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-7} \frac{\sqrt{1-x^2}}{m-6} + \frac{m-7}{m-6} \int \frac{x^{m-8} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ainsi de suite.

La première de ces équations nous donnera la valeur de

$$\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ qu'on mettra dans l'équation (60), et l'on trouvera}$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m} \frac{x^{m-3}}{m-2} \right] + \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

on substituera ensuite successivement dans ce résultat, les valeurs de

$$\int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ de } \int \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ etc. :}$$

si m est un nombre entier pair, la dernière intégrale que l'on obtiendra sera

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x);$$

si m est un nombre entier impair, cette dernière intégrale sera

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et comme alors $x dx$ est la différentielle de x^2 , à un facteur constant près, nous ferons $1 - x^2 = z$, ce qui nous donnera

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int -\frac{\frac{1}{2} dz}{\sqrt{z}} = \int -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = -z^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{z} = -\sqrt{1-x^2}.$$

La dernière intégrale étant trouvée, il en résulte que lorsque m sera un nombre entier, la formule pourra toujours s'intégrer.

254. Prenons encore pour exemple $\frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}}$; en écrivant ainsi cette expression

$$x^{-m} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

on la comparera à la formule (59) pour diminuer l'exposant hors de la parenthèse, et l'on aura

$$m-1 = -m, \quad a=1, \quad b=-1, \quad n=2, \quad p=-\frac{1}{2};$$

au moyen de ces valeurs, la formule (59) deviendra

$$\int x^{-m} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1-m} x^{1-m} + \frac{(2-m)}{1-m} \int x^{-m+2} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

ou plutôt

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-2} \sqrt{1-x^2}}. \quad (61)$$

Si m est un nombre pair, par exemple, 8, l'intégrale de $\frac{dx}{x^8 \sqrt{1-x^2}}$

dépendra de celle de $\frac{dx}{x^6 \sqrt{1-x^2}}$; celle-ci, en vertu de la même for-

mule, dépendra à son tour de celle de $\frac{dx}{x^4 \sqrt{1-x^2}}$, jusqu'à $m=2$; dans ce dernier cas la formule (61) donnera

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C,$$

de sorte que par des substitutions successives on obtient l'intégrale lorsque m est pair.

Dans le cas où m est impair, par exemple 7, en mettant successivement dans la formule (61), à la place de m , les valeurs 7, 5, 3, on ne pourra s'arrêter à $m = 1$; car, dans cette hypothèse, le coefficient $\frac{m-2}{m-1}$ de la seconde intégrale deviendrait $-\frac{1}{0} = -\infty$; ainsi, la plus petite valeur que l'on pourra donner à x , sera $x = 3$. Dans cette hypothèse, la formule (61) deviendra

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}.$$

Pour intégrer l'expression $\frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$, nous ferons $x = \frac{1}{z}$, ce qui nous donnera

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \text{ et } \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{z^2-1}}{z},$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = -\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}};$$

nous avons trouvé, art. 211, pag. 143,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \log(z + \sqrt{z^2-1}),$$

donc, en changeant x en z , nous aurons

$$\int -\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = -(\log z + \sqrt{z^2-1});$$

remettant pour z sa valeur $\frac{1}{x}$, on aura

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = -\log \left[\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \right] + C = -\log \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) + C;$$

ainsi la formule $\frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}}$ peut s'intégrer, soit qu'on prenne m pair ou impair.

De la quadrature des courbes.

FIG. 51. 255. Soit, fig. 51, l'aire $ABMP$ d'une courbe plane ; si l'abscisse $AP = x$, devient $AP' = x + h$, l'aire s deviendra *

$$s + \frac{ds}{dx} h + \frac{d^2s}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.} ;$$

on aura donc

$$\text{aire mixtiligne } PMMP' = \frac{ds}{dx} h + \frac{d^2s}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.} ;$$

cette aire est comprise entre les deux rectangles PM et $P'M$, dont il est facile d'avoir les expressions analytiques :

$$\text{le rectangle } PM = f(x + h) \cdot h,$$

$$\text{le rectangle } P'M = fx \cdot h ;$$

le rapport de ces rectangles est

$$\frac{f(x + h) \cdot h}{fx \cdot h} = \frac{f(x + h)}{fx} ;$$

dans le cas de la limite, ce rapport se réduit à

$$\frac{fx}{fx} = 1.$$

Or, la surface mixtiligne $PMM'P'$, étant comprise entre les deux rectangles, diffère moins du rectangle $P'M$ que le rectangle PM ; donc ; si dans le cas de la limite on a $\frac{PM'}{P'M} = 1$, à plus forte raison l'unité sera la limite du rapport

$$\frac{\text{aire } PMM'P'}{\text{rectangle } P'M}.$$

En remplaçant les termes de ces rapports par leurs ex-

pressions analytiques, on aura

$$\frac{\frac{ds}{dx} h + \frac{d^2s}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.}}{fx \cdot h} = \frac{\frac{ds}{dx} + \frac{d^2s}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}}{fx};$$

on passera à la limite en faisant $h = 0$, et l'on trouvera

$\frac{ds}{dx} = 1$, d'où $ds = fx \cdot dx$; et en mettant pour fx sa valeur, on aura

$$ds = y dx. \dots (62).$$

256. On peut aussi déterminer la différentielle de l'aire d'une courbe par la méthode des infiniment petits de la manière suivante, fig. 59:

FIG. 59.

$$\text{trapèze } PMM'P' = \frac{PM + P'M'}{2} \times PP' = \frac{y + (y + dx)}{2} \times dx = y dx + \frac{dx^2}{2};$$

rejetant dx^2 comme infiniment petit du second ordre il reste $y dx$ pour la différentielle.

257. Pour première application, cherchons, fig. 52, FIG. 52.

l'aire d'une portion BMP' de parabole. Soit $y^2 = mx$

l'équation de cette parabole dont l'origine est B ; on

trouve, en différenciant, $2y dy = m dx$; donc $dx = \frac{2y}{m} dy$,

et par conséquent $y dx = \frac{2y^2}{m} dy$: intégrant, on a

$$\int \frac{2y^2}{m} dy = \frac{2}{3} \frac{y^3}{m} + C. \dots (63).$$

Pour déterminer la constante, j'observe que lorsque $y = 0$, l'intégrale, qui exprime la surface cherchée, est nulle en même temps. Cette hypothèse réduit l'équation (63) à $0 = 0 + C$; donc

$$\int y dx = \frac{2y^3}{3m} = \frac{2}{3} \frac{y}{m} \cdot y^2 = \frac{2}{3} \frac{y}{m} \times mx = \frac{2}{3} xy.$$

258. Nous avons maintenant des observations importantes à faire sur la détermination de la constante : pour cela résolvons le même problème en prenant la parabole dont l'équation est

$$y^2 = m + nx. \dots (64).$$

L'origine des abscisses ici n'est plus au sommet de la courbe; car, en faisant $y = 0$, l'équation (64) donne $x = -\frac{m}{n}$; et

FIG. 55, comme cette abscisse doit se terminer au point B , fig. 53, où $y = 0$, on portera $\frac{m}{n}$ de B en A , et le point A sera l'origine. Cela posé, en opérant comme précédemment, on trouvera

$$2ydy = ndx, \text{ donc } ydx = \frac{2y^2}{n} dy \text{ et } \int ydx = \frac{2}{3} \frac{y^3}{n} + C. \dots (65).$$

Pour déterminer la constante j'observe, que la surface $ADPM$, fig. 53, qui représente ici l'intégrale, doit être nulle lorsque l'ordonnée MP coïncide avec AD ; or, AD étant l'ordonnée qui passe par l'origine A où l'abscisse $x = 0$, l'équation (64) nous donnera dans cette hypothèse,

$$y \text{ ou } DA = \sqrt{m}; \text{ faisant donc } \int ydx = 0 \text{ et } y = \sqrt{m},$$

ces valeurs réduiront l'équation (65) à $0 = \frac{2}{3} \frac{m^{\frac{3}{2}}}{n} + C$;

d'où l'on déduit $C = -\frac{2}{3} \frac{m^{\frac{3}{2}}}{n}$, et par conséquent l'intégrale cherchée est.

$$\int ydx = \frac{2}{3} \frac{y^3}{n} - \frac{2}{3} \frac{m^{\frac{3}{2}}}{n} = \text{aire } ADMP.$$

259 Dans ce qui précède nous avons tiré de l'équation de la courbe la valeur de dx , pour la substituer dans

la formule de $y \, dx$, et intégrer ensuite. Nous aurions pu opérer autrement, en mettant dans cette expression la valeur de y plutôt que celle de dx ; car, pour obtenir l'intégrale, il suffit que la différentielle proposée ne contienne qu'une variable; ainsi on choisira la substitution qui exigera le moins de calculs.

260. Une intégrale telle que $\int f x \cdot dx$, peut toujours représenter l'aire d'une courbe dont l'équation serait $y = f x$: en effet, cette équation étant donnée, si l'on substitue la valeur de y dans la formule $\int y \, dx$, on aura

$\int f x \cdot dx$ pour la surface de cette courbe. C'est pourquoi lorsqu'un problème nous a conduits à intégrer une fonction d'une seule variable, on dit que ce problème est ramené aux quadratures.

261. Soit X une fonction de x , et supposons qu'en intégrant $X \, dx$, on ait obtenu

$$\int X \, dx = Fx + C \dots (66)$$

cette intégrale dans laquelle la constante C n'est pas encore déterminée, porte le nom d'intégrale indéfinie générale ou plus simplement d'intégrale indéfinie, et elle est complète lorsqu'elle renferme la constante arbitraire C .

262. Si par une hypothèse on détermine cette constante C , si l'on suppose, par exemple, que $\int X \, dx$ doive s'évanouir lorsque $x = a$, l'équation (66) donne dans ce cas $0 = Fa + C$; donc $C = -Fa$, et l'équation (66)

devient

$$\int Xdx = Fx - Fa,$$

cette intégrale $Fx - Fa$ est alors une intégrale particulière, et l'on voit que le nombre des intégrales particulières d'une expression différentielle est illimité, puisqu'on peut établir une infinité d'hypothèses différentes sur la constante.

263. Lorsqu'on fait l'hypothèse de l'intégrale nulle et de $x = a$, c'est admettre qu'en prenant, fig. 54, une abscisse $AB = a$, la surface soit comprise entre la limite BD et la limite indéfinie MP qui correspond à $AP = x$; donc l'opération par laquelle nous déterminons une intégrale particulière, est la même que celle qui fixerait la position de la limite BD , depuis laquelle on compte l'intégrale. La seconde limite PM sera fixée à son tour invariablement, si nous donnons à x une valeur déterminée b ; alors l'intégrale particulière $\int ydx = Fx - Fa$, deviendra

$$\int ydx = Fb - Fa \dots (67),$$

et la surface $BDMP$ ne sera plus arbitraire. Dans ce cas l'intégrale porte le nom d'intégrale définie, et l'on dit qu'elle est prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

264. Cherchons maintenant l'intégrale définie de $x^m dx$; nous sommes donc censés connaître deux valeurs a et b , qui satisfont à l'intégrale indéfinie,

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C \dots (68).$$

Supposons que la première corresponde à $\int ydx = 0$, on

aura

$$\frac{a^{m+1}}{m+1} + C = 0;$$

et l'intégrale particulière sera

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Nous ferons ensuite $x = b$, et nous aurons pour l'intégrale définie

$$\int x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

265. On parvient aussi à cette intégrale en faisant successivement $x = a$ et $x = b$ dans l'intégrale indéfinie, et l'on a

$$= \frac{a^{m+1}}{m+1} + C, \text{ et } \frac{b^{m+1}}{m+1} + C;$$

on retranchera ensuite le premier résultat du second ; mais, en prenant cette différence, il faut toujours avoir soin que la partie soustraite soit la valeur de la fonction de x à l'origine de l'intégrale.266. Pour troisième application, déterminons l'aire d'un triangle rectangle ABC , fig. 55 : l'équation de la droite AC étant $y = ax$, en mettant cette valeur de y dans la formule de $y dx$, on obtient $ax dx$, donc

$$\int y dx = \int ax dx = \frac{ax^2}{2} + C;$$

la surface étant nulle quand $x = 0$, la constante est égale à zéro, donc

$$\text{aire } ABC = \frac{ax^2}{2} = \frac{x}{2} \times ax = \frac{xy}{2}.$$

267. Si dans la formule $y dx$ on met la valeur de y tirée de l'équation du cercle, on trouvera $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$ pour l'expression de l'aire du cercle. Nous avons vu

art. 205, que cette intégrale avait pour valeur

$$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \left(\sin = \frac{x}{a} \right) + C.$$

La partie $\frac{1}{2} a^2 \arcsin \left(\sin = \frac{x}{a} \right)$ ne pouvant se déterminer qu'en supposant connu le rapport du diamètre à la circonférence*, on voit que l'intégration de $dx \sqrt{a^2 - x^2}$ ne peut conduire à la solution du problème de la quadrature du cercle. Il en est de même de la quadrature de l'ellipse, qui dépend de

$$\frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

268. Si l'on compare ces deux expressions, on en tirera la proportion

$$\text{aire ellipse} : \text{aire cercle} :: \frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2} : \int dx \sqrt{a^2 - x^2},$$

ou

$$\text{aire ellipse} : \text{aire cercle} :: \frac{b}{a} : 1,$$

d'où l'on tire

$$\text{aire ellipse} = \frac{b}{a} \times \text{aire cercle} = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab.$$

De la rectification des courbes.

269. Rectifier une courbe, c'est obtenir une droite égale à un arc de courbe. Nous avons trouvé, art. 133, que la différentielle d'un arc de courbe avait pour expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \dots (68);$$

une équation entre deux variables x et y étant donnée,

* Si par exemple $x = \frac{1}{3} a$, j'ai $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$, et j'opère comme dans l'art. 205, pour déterminer l'arc correspondant.

si l'on veut rectifier la courbe à laquelle elle appartient, on différenciera cette équation, et on en tirera la valeur de dx ou de dy , qu'on substituera dans l'expression 68; alors le radical ne contiendra plus qu'une variable, et si l'on peut obtenir l'intégrale, la courbe sera rectifiable.

270. Prenons pour exemple la courbe* dont l'équation est $y^3 = nx^2$, trouvée art. 138; cette équation étant différenciée nous donnera

$$3y^2 dy = 2nxdx,$$

d'où nous tirerons

$$dx = \frac{3y^2 dy}{2nx} \text{ et } dx^2 = \frac{9}{4} \frac{y^4}{n^2 x^2} \quad dy^2 = \frac{9}{4} \frac{y^4}{ny^2} \quad dy^2 = \frac{9}{4} \frac{y}{n} dy^2;$$

substituant on a

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4} \frac{y}{n} + 1\right) dy^2} = dy \sqrt{\frac{9}{4} \frac{y}{n} + 1};$$

dy étant la différentielle de l'expression qui est sous le radical à une constante près, nous ferons $\frac{9}{4} \frac{y}{n} + 1 = z$,

d'où $dy = \frac{4n}{9} dz$; substituant nous aurons

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{4n}{9} z^{\frac{1}{2}} dz;$$

donc

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{4n}{9} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{8n}{27} z^{\frac{3}{2}} + C,$$

* Elle porte le nom de *seconde parabole cubique*. Cette équation, ainsi que celle de la parabole ordinaire, ne sont que des cas particuliers de l'équation générale $y^m = ax^n$; c'est pourquoi cette équation est appelée l'équation de la parabole de tous les ordres.

On a aussi regardé l'équation $xy = a$ de l'hyperbole entre ses asymptotes, comme un cas particulier de l'équation $x^m y^m = a$, qui est appelée pour cette raison l'équation de l'hyperbole de tous les ordres.

ou, en remettant la valeur de z ,

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{8a}{27} \left(\frac{9}{4} \frac{y}{a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Pour déterminer la constante, on voit, d'après la nature de l'équation de la courbe, qu'à l'origine des abscisses y est 0; ainsi, en supposant que l'intégrale soit nulle en ce point, on a

$$0 = \frac{8a}{27} + C, \text{ donc } C = -\frac{8a}{27},$$

et par conséquent

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{8a}{27} \sqrt{\left[\frac{9}{4} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right]^3} - \frac{8a}{27}.$$

Si $x = a$, l'arc s compris entre les limites $x = 0$ et $x = a$ sera

$$s = \frac{8a}{27} \sqrt{\left[\left(\frac{a}{a} \right)^2 + 1 \right]^3} - \frac{8a}{27}.$$

271. L'équation de la cycloïde, art. 149, donne $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{2ay - y^2}$; substituant cette valeur dans la formule (68), nous trouverons

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dy^2 + \frac{y^2 dy^2}{2ay - y^2}} = dy \sqrt{\frac{2ay}{2ay - y^2}} = dy \sqrt{\frac{2a}{2a - y}} \\ &= (2a)^{\frac{1}{2}} \times \frac{dy}{(2a - y)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Comme dy exprime la différentielle de l'expression qui est sous la parenthèse, multipliée par -1 , nous ferons, art. 194, $2a - y = z$, et nous aurons

$$dy \sqrt{\frac{2a}{2a - y}} = -(2a)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Cette équation, étant intégrée, donne

$$\int dy \sqrt{\frac{2a}{2a - y}} = -2(2a)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{2az} + C,$$

ou, en restituant la valeur de y ,

$$\int dy \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} = -2\sqrt{2a(2a-y)} + C... (69).$$

Pour déterminer la constante nous prendrons l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse quand $y = 2a$; dans cette hypothèse, l'équation (69) se réduira à $0 = 0 + C$, ce qui montre qu'il n'y a point de constante à ajouter; alors l'arc de cycloïde s'étendra depuis le point B , fig. 57, où $y = 2a$, jusqu'au point M dont les coordonnées sont x et y . La valeur absolue de l'arc MB étant $2\sqrt{2a(2a-y)}$, nous remarquerons que $BE = 2a - y$, donc $2\sqrt{2a(2a-y)} = 2\sqrt{BD \times BE} = 2BG$; d'où il suit que l'arc de cycloïde MB est égal au double de la corde GB ; par conséquent, arc $AB = 2BD$.

De la détermination de l'aire des solides de révolution.

272. Si une courbe BC , fig. 51, tracée sur un plan, fait FIG. 51. une révolution autour de l'axe AX , elle engendrera un solide de révolution. Cherchons la différentielle de l'aire engendrée par cette courbe. Pour cet effet, soient $AP = x$, $PM = y$, $PP' = h$, et par conséquent,

$$PM = f(x) = y,$$

$$P'M' = f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.}$$

Dans ce mouvement de rotation les ordonnées MP et MP' décrivant des cercles inégaux, ces cercles seront les bases d'un cône tronqué dont la corde MM' sera le côté. L'aire de ce cône tronqué aura pour expression

$$\frac{\text{circ. } PM + \text{circ. } P'M'}{2} \times \text{corde } MM'.$$

En représentant par $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence, l'expression précédente deviendra

$$\frac{2\pi PM + 2\pi P'M'}{2} \times \text{corde } MM' = \pi(PM + P'M') \times \text{corde } MM',$$

et en mettant, pour les ordonnées PM et $P'M'$, leurs valeurs analytiques, on aura

$$\text{aire cône tronq. } MM' = \pi \left(2\gamma + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.} \right) \times \text{corde } MM',$$

d'où l'on tirera, en divisant

$$\frac{\text{aire cône tronqué } MM'}{\text{corde } MM'} = \pi \left(2\gamma + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.} \right).$$

Si nous représentons maintenant par u l'aire engendrée par le mouvement de rotation de l'arc MM' , et par s cet arc de courbe, le premier membre de l'équation précédente devra être remplacé dans le cas de la limite par $\frac{du}{ds}$, et comme le second se réduit alors à $2\pi\gamma$, nous obtiendrons

$$\frac{du}{ds} = 2\pi\gamma,$$

et par conséquent $du = 2\pi\gamma ds$, et en mettant pour ds sa valeur trouvée, art 133, on aura enfin

$$du = 2\pi\gamma \sqrt{dx^2 + dy^2} C... (70).$$

273. On peut donner une démonstration encore plus rigoureuse de la différentielle de l'aire d'un solide de révolution; la voici: si l'on imagine que la fig. 58 fasse une révolution autour de l'axe AX , il est certain que la surface engendrée par l'arc MM' sera comprise entre la surface engendrée par la ligne brisée MTM' et la surface décrite par la corde MM' ; cherchons donc les expressions analytiques de ces surfaces. La surface engendrée par MTM' renferme ces deux parties:

FIG. 58.

1°. Celle qui est engendrée par MT ;

2°. Celle qui est engendrée par TM' .

Or, il est évident que la surface engendrée par MT , est celle d'un cône tronqué dont MT serait le côté et dont PM et $P'T$ seraient les rayons des bases; par conséquent l'aire de ce cône tronqué est égale à la $\frac{\pi}{2}$ somme des circonférences dont les rayons sont PM et $P'T$, multipliée par le côté MT ; et, puisque les circonférences décrites par PM et par $P'T$ sont $2\pi PM$ et $2\pi P'T$, nous aurons

$$\text{aire cône tronqué } MT = 2\pi \frac{(PM + P'T)}{2} MT = \pi (PM + P'T) MT.$$

D'une autre part, dans ce mouvement de rotation, $P'T$ et $P'M'$ décrivent des cercles dont les aires sont $\pi P'T^2$ et $\pi P'M'^2$; la différence de ces aires ou l'aire engendrée par TM' sera $\pi (P'T^2 - P'M'^2)$; donc

$$\text{la surface décrite par } MTM' = \pi [(PM + P'T) MT + P'T^2 - P'M'^2].$$

Par le même procédé qui nous a servi à trouver l'expression de la surface du cône tronqué, engendré par MT , nous trouverions que le cône tronqué engendré par MM' , a pour expression $\pi (PM + P'M') MM'$; donc

$$\frac{\text{aire décrite par } MTM'}{\text{aire décrite par } MM'} = \frac{\pi [(PM + P'T) MT + P'T^2 - P'M'^2]}{\pi (PM + P'M') MM'}. \quad (71)$$

Cela posé, soient $AP = x$, $PM = y$, $PP' = h$, on trouvera

$$P'M' = f(x + h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

$$P'T = PM + QT = y + QT; \text{ or, } QT = h \tan g TMQ = h \frac{dy}{dx},$$

$$\text{donc } P'T = y + \frac{dy}{dx} h;$$

substituant les valeurs de PM , de $P'M'$ et de $P'T$, dans l'équation (71), le rapport des deux aires deviendra

$$\frac{\pi \left[\left(2y + \frac{dy}{dx} h \right) MT + \left(y + \frac{dy}{dx} h \right)^2 - \left(y + \frac{dy}{dx} h + \text{etc.} \right)^2 \right]}{\pi \left(2y + \frac{dy}{dx} h + \text{etc.} \right) MM'}.$$

Dans le cas de la limite, $MT = MM'$, $h = 0$, et le premier membre de l'équation (71) se réduit à l'unité. Représentons par s l'arc de cercle MM' , et par z la surface engendrée par cet arc de cercle : il est certain que la surface z étant comprise entre celles dont nous venons de prendre la limite, le rapport de cette surface à l'une d'entre elles aura à plus forte raison pour limite l'unité; or nous avons

$$\frac{\text{aire décrite par l'arc } MM'}{\text{aire décrite par la corde } MM'} = \frac{z}{\pi \left(2y + \frac{dy}{dx} h + \text{etc.} \right) MM'};$$

égalant donc cette expression à l'unité en y faisant $h = 0$, $z = ds$ et $MM' = ds$, nous aurons

$$\frac{dz}{2\pi y ds} = 1,$$

d'où l'on tire

$$dz = 2\pi y \, ds = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

en mettant pour ds sa valeur trouvée, art. 133.

274. Par les infiniment petits on aurait considéré l'élément de la surface de révolution, comme celle d'un cône tronqué, engendré par le trapèze élémentaire *MPM'P'*, fig. 59; ce trapèze aurait donc pour expression

$$\pi(2y + dy) ds = 2\pi y ds + \pi dy ds;$$

supprimant le terme $\pi dy ds$, comme infiniment petit du second ordre, il resterait

$$2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ élément de la surface de révolution.}$$

275. Pour première application, prenons l'aire du paraboloïde de révolution, qui est le solide engendré par la révolution d'un arc AM de parabole, fig. 60, autour de son axe : l'équation de la parabole $y^2 = px$ donne

$$dx = \frac{2y dy}{p} \text{ et } dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{p^2}.$$

FIG. 59.

FIG. 60.

Cette valeur étant substituée dans la formule $2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, la réduit à

$$2\pi y \sqrt{\left(\frac{4y^2 + p^2}{p^2}\right) dy^2} = \frac{2\pi}{p} y dy \sqrt{4y^2 + p^2}.$$

$y dy$ étant la différentielle de la quantité qui est sous le radical, à une constante près, je fais, art. 194, $4y^2 + p^2 = z$, et en différenciant je trouve $y dy = \frac{dz}{8}$; substituant et intégrant, j'obtiens

$$\begin{aligned} \int \frac{2\pi}{p} y dy \sqrt{4y^2 + p^2} &= \int \frac{\pi}{4p} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{\pi}{6} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{p} + C \\ &= \frac{\pi}{6p} (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} + C, \end{aligned}$$

Je détermine la constante en supposant que l'intégrale soit nulle lorsque $y = 0$, ce qui réduit l'équation précédente à

$$0 = \frac{\pi}{6} p^3 + C, \text{ ce qui donne } C = -\frac{\pi p^3}{6};$$

et en supposant que l'intégrale soit prise depuis $y = 0$, jusqu'à $y = b$, l'intégrale définie sera

$$\frac{\pi}{6p} \left[(4b^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3 \right]$$

276. Pour seconde application, évaluons l'aire de la sphère. Cette surface courbe étant engendrée par la révolution de la demi-circonférence autour du diamètre, soit $x^2 + y^2 = a^2$, l'équation du cercle; en différenciant nous trouverons $x dx + y dy = 0$; donc

$$dy = -\frac{x dx}{y} \text{ et } dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{y^2};$$

substituant cette valeur dans la formule (70), nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \int 2\pi y \sqrt{\left(\frac{x}{y} + 1\right) dx} &= \int 2\pi dx \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \int 2\pi adx = 2\pi ax + C. \quad (72). \end{aligned}$$

Pour déterminer la constante nous prendrons l'intégrale
FIG. 61. à partir du point *A*, fig. 61, et puisque l'origine des abscisses est au centre, nous supposons l'intégrale nulle lorsque $x = -a$; cette hypothèse réduira l'équation (72) à

$$0 = -2\pi a^2 + C, \text{ donc } C = 2\pi a^2;$$

substituant cette valeur dans l'équation (72), nous aurons

$$\int 2\pi adx = 2\pi (ax + a^2).$$

Prenons maintenant l'intégrale définie entre les limites $x = -a$ et $x = a$, il faudra changer x en a dans la formule précédente, et nous obtiendrons pour la surface de la sphère

$$\int 2\pi adx = 2\pi (2a^2) = 4\pi a^2.$$

277. On peut aussi trouver l'aire du cylindre droit, car cette surface étant engendrée par la révolution du rectangle

FIG. 62. *AD*, fig. 62, autour de l'axe *AB*, soient $AB = a$, $CA = b$, l'équation de la droite *CD* sera $y = b$, donc $dy = 0$. En substituant ces valeurs dans la formule (70), on la réduit à $2\pi b dx$; et en intégrant on a

$$\int 2\pi b dx = 2\pi bx + C.$$

Si l'on prend l'intégrale définie entre les limites $x = 0$ et $x = a$, on trouve pour l'aire du cylindre

$$2\pi ba = 2\pi b \times a = \text{circonférence de la base} \times \text{hauteur.}$$

A l'égard de l'aire du cône, ce solide étant engendré par la rotation du triangle rectangle ABC , fig. 55, autour de l'axe AB ; soient $AB = a$, $CB = b$, l'équation de AC sera $y = \frac{b}{a}x$; cette équation donne par la différentiation

$$dy = \frac{b}{a} dx \text{ et } dy^2 = \frac{b^2}{a^2} dx^2.$$

Les valeurs de y et de dy étant substituées dans la formule (70), on a

$$\int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int 2\pi \frac{bx}{a^2} dx \sqrt{a^2 + b^2} = \pi \frac{bx^2}{a^2} \sqrt{a^2 + b^2} + C,$$

et en prenant l'intégrale définie entre les limites $x = 0$ et $x = a$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{aire du cône} &= \pi b \sqrt{a^2 + b^2} = 2\pi b \times \frac{AC}{2} \\ &= \text{circonférence } BC \times \frac{AC}{2}. \end{aligned}$$

De la cubature des solides de révolution.

278. Soit v le volume engendré par la révolution de l'aire mixtiligne $ABPM$ autour de l'axe AX , fig. 51; si l'abscisse $AP = x$ devient $AP' = x + h$, le solide de révolution s'accroîtra du corps engendré par la rotation du trapèze mixtiligne $PMMP'$ autour du même axe. Le volume engendré par $ABMP$ étant une fonction de x , puisqu'il augmente ou diminue en même temps que x , le volume engendré par $ABMP'$ sera une fonction de $x + h$, et

aura pour expression

$$v + \frac{dv}{dx} h + \frac{d^2v}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.};$$

par conséquent, si on en retranche le volume engendré par $ABMP$, on aura

$$\frac{dv}{dx} h + \frac{d^2v}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.}$$

pour le volume engendré par PMP' . Or, ce volume, étant compris entre les cylindres engendrés par les rectangles MP' et MP , différera moins de l'un de ces cylindres que ces cylindres ne diffèrent entr'eux; donc, si l'on peut prouver que, dans le cas de la limite, le rapport de ces cylindres est l'unité, il en sera à plus forte raison de même du rapport du corps décrit par PMP' , à l'un de ces cylindres. Cela posé, on a évidemment,

le cylindre décrit par $PM \doteq \pi (f(x+h))^2 h$,

le cylindre décrit par $P'M = \pi (fx)^2 h$;

donc le rapport de ces cylindres est exprimé par

$$\frac{[f(x+h)]^2}{(fx)^2}.$$

En faisant $h = 0$, on voit que ce rapport se réduit à l'unité; il en sera donc de même du rapport du volume engendré par PMP' à celui du cylindre décrit par MP' . Or, ce rapport étant représenté par

$$\frac{\frac{dv}{dx} h + \frac{d^2v}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.}}{\pi (fx)^2 h} = \frac{\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}}{\pi (fx)^2},$$

on a, dans le cas de la limite,

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{\pi (fx)^2} = 1;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dv}{dx} = \pi (fx)^2 = \pi y^2,$$

et enfin ,

$$dv = \pi y^2 dx. \dots (73)$$

279. On parviendrait au même résultat par la considération des infiniment petits : car on peut concevoir le volume *MON*, fig. 64, comme partagé en tranches infiniment minces, par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution ; l'une de ces tranches, qui est l'élément du corps, peut être considérée comme un cylindre, dont la base est le cercle décrit par y , et dont la hauteur est égale à l'épaisseur ab , représentée par dx ; par conséquent cet élément a pour expression $\pi y^2 dx$.

280. Appliquons cette formule à la détermination du volume de l'ellipsoïde allongé, qui est le volume engendré par la révolution de l'ellipse autour de son grand axe : l'équation de l'ellipse rapportée au centre étant $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$, on substituera cette valeur de y^2 dans la formule $\pi y^2 dx$, et l'on aura

$$\pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx,$$

et, en intégrant, on trouvera

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) + C. \dots (74).$$

Supposons que l'intégrale soit nulle au point *A*, fig. 56, ou $x = -a$, nous aurons

$$C = \pi \frac{b^2}{a^2} \times \frac{2}{3} a^3,$$

et en substituant cette valeur de C , l'équation (74) devient

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} a^3 \right).$$

Faisons ensuite $x = a$, pour avoir l'intégrale définie comprise entre les limites $x = -a$ et $x = +a$, nous obtiendrons

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} a^3,$$

tel sera le volume de l'ellipsoïde allongé. Si $b = a$, ce volume deviendra celui de la sphère et aura pour expression

$$\frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^2 \times 2a = \frac{2}{3} \text{ du cylindre circonscrit.}$$

Déterminons encore le volume du paraboloides de révolution. Pour cet effet, prenons la parabole de tous les ordres pour génératrice, l'équation de cette parabole nous donnera

$y = ax^{\frac{n}{m}}$; substituant cette valeur dans la formule (73), nous obtiendrons

$$v = \int \pi a^2 x^{\frac{2n}{m}} dx = \frac{m \pi a^2 x^{\frac{2n+m}{m}}}{\frac{2n}{m} + m} + C.$$

Pour déterminer la constante, nous supposerons que le volume soit nul à l'origine ou $x = 0$; alors nous aurons $C = 0$. Dans le cas de la parabole ordinaire, $m = 2$, $n = 1$, donc

$$v = \pi a^2 \frac{x^3}{2} = \pi a^2 x \frac{x}{2} = \pi y^2 \cdot \frac{x}{2}.$$

FIG. 65. Or, πy^2 étant l'aire du cercle dont PM , fig. 65, est le rayon, l'expression $\frac{1}{2} \pi y^2 \cdot x$ représente la moitié du cylindre décrit par $APMB$ autour de l'axe des abscisses : donc le volume de la parabole ordinaire est la moitié de celui du cylindre circonscrit.

281. La cubature des solides de révolution pent s'appliquer à l'excavation des mines : on entend par mine une cavité souterraine à l'extrémité de laquelle on place une charge de poudre qui par son explosion fait sauter le terrain situé au-dessus. Comme la poudre dirige son effort du côté qui lui oppose le moins de résistance, on remplit la mine d'objets arc-boutés, tels que des pierres, des pièces de bois, de la maçonnerie, etc., et l'on met le feu à la charge au moyen d'un boyau de cuir rempli de poudre et aboutissant à la charge. Ordinairement on place la charge dans un cube qu'on appelle le fourneau ou la chambre de la mine; le solide enlevé par la mine est son excavation, et le creux qui se forme après l'explosion, est l'entonnoir de la mine.

On a observé que dans les terrains homogènes, l'entonnoir de la mine était un parabolôïde renversé GAE , fig. 63, dans lequel le centre du fourneau se trouvait au foyer; et que la distance FD du centre du fourneau à la superficie du terrain, qu'on suppose horizontale, était égale au rayon du cercle $GLEK$ qui termine l'excavation. La droite FD s'appelle la ligne de moindre résistance; la partie BAC située sur son prolongement est une cavité qui provient de l'effort de la poudre contre le terrain. Cette cavité jointe à celle qui est formée par l'excavation, composent ensemble l'entonnoir.

Pour calculer l'excavation, il faut évaluer le solide $GEBC$; soient donc $AF = a$, $FD = b$, et $y^2 = px$, ou plutôt, $y^2 = 4ax^*$, l'équation de la parabole GAE ; si l'on met cette valeur de y^2 dans la formule (73), on trouvera

$$\int \pi y^2 dx = 4\pi a \int x dx = 2\pi ax^2 + C;$$

prenant l'intégrale définie entre les limites $x = a$ et $x = a + b$, on trouvera

$$\int \pi y^2 dx = 2\pi a (b^2 + 2ab). \dots (75);$$

telle sera l'expression du volume de l'excavation $GBCE$. On pent

* En effet, les coordonnées $AF = a$, et $BF = \frac{1}{2}p$, devant satisfaire à l'équation $y^2 = px$, si l'on substitue ces valeurs, on trouvera $\frac{1}{4}p^2 = pa$, donc $p = 4a$.

simplifier cette expression par la relation qui existe entre a et b . En effet, puisque d'après l'observation on a $GD = DF$, il faut que les coordonnées $x = a + b$, et $y = b$, satisfassent à l'équation de la parabole, ce qui nous donnera

$$b^2 = 4a(a + b),$$

d'où l'on tirera

$$a = -\frac{b}{2} \pm \frac{b}{2} \sqrt{2};$$

a devant être positif, nous prendrons le signe supérieur et nous aurons

$$a = \frac{b}{2} (\sqrt{2} - 1);$$

cette valeur réduit l'équation (75) à

$$\begin{aligned} \int \pi y^2 dx &= \pi b (\sqrt{2} - 1) b^2 \sqrt{2} = \pi b^3 (2 - \sqrt{2}) \\ &= b^3 (1,8403 \text{ etc.}), \end{aligned}$$

et en ne prenant que les deux premières décimales,

$$\int \pi y^2 dx = b^3 \times \frac{184}{100} = b^3 \times \frac{46}{25};$$

donc l'excavation de la mine est environ la $\frac{46}{25}$ partie du cube de la ligne de moindre résistance.

Ainsi, en supposant que 7 hectogrammes de poudre enlèvent un mètre cube de terrain, il faudra multiplier par 7 les mètres cubes de l'excavation, pour avoir la quantité de poudre que l'on doit employer pour faire jouer la mine.

282. Lorsque les solides ne sont pas de révolution, on peut aussi déterminer leurs volumes par le calcul intégral. Pour en donner un

FIG. 66. exemple, je vais chercher celui de la pyramide $ABCD$, fig. 66. Pour cet effet, concevons une section GFE , parallèle à la base DBC , et du sommet A abaissons une perpendiculaire AH sur la base DCB ; nommons x et h les parties AI et IH de cette perpendiculaire, comprises entre le point A et les plans DCB , GFE ; l'aire du triangle GFE , diminuant, ou augmentant selon la valeur que l'on donne à x , est une fonction de x ; on a donc

$$GEF = fx, \quad DBC = f(x + h).$$

Le volume de la pyramide $AGFE$ étant aussi une fonction de x , nous pourrions supposer

$$\text{vol. } AGFE = \varphi x, \quad \text{vol. } ADBC = \varphi(x + h).$$

Or, il est évident que la pyramide tronquée GB , qui est la différence de ces volumes, sera moindre que le volume du prisme, qui a BCD pour base, et h pour hauteur, et surpassera le volume du prisme qui a EFG pour base et h pour hauteur. Le rapport de ces prismes est

$$\frac{f(x + h)h}{fx \cdot h} = \frac{f(x + h)}{fx};$$

dans le cas de la limite, ce rapport devenant égal à l'unité, à plus forte raison, le rapport qui existe entre le tronc de pyramide GB , et l'un de ces prismes, sera alors égal à l'unité. Le volume du tronc de pyramide étant représenté par $\varphi(x + h) - \varphi x$, le rapport de ce volume à celui du prisme dont GFE est la base et, h la hauteur, sera

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi x}{fx \cdot h} = \frac{\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{d^2\varphi x}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}}{fx};$$

passant à la limite, nous aurons

$$\frac{d\varphi x}{fx \cdot dx} = 1, \text{ ou } d\varphi x = fx \cdot dx \dots (76).$$

283. Par la méthode des infiniment petits, on serait parvenu au même résultat, car en concevant la pyramide comme composée d'une infinité de tranches parallèles à sa base, chaque tranche pourrait être considérée comme un prisme dont fx serait la base et dx la hauteur; donc $fx \cdot dx$ est l'élément de la pyramide.

284. Pour déterminer maintenant le volume de la pyramide, soient B l'aire de sa base DBC et A sa hauteur, nous aurons

$$B : fx :: A^2 : x^2,$$

donc

$$fx = \frac{Bx^2}{A^2};$$

substituant cette valeur dans l'équation (76), on trouvera

$$d\varphi x = \frac{Bx^2}{A^2} dx,$$

et en intégrant

$$\varphi x = \frac{Bx^3}{3A}.$$

Le volume $AGEF$ représenté par φx , s'évanouissait lorsque $x = 0$, il n'y a point de constante à ajouter. Si l'on fait ensuite $x = A$, on aura pour l'intégrale définie, l'expression $\frac{BA}{3}$, qui est celle du volume de la pyramide $ACBD$.

En général, si la section GFE , au lieu d'être un triangle, est une surface quelconque, pourvu que cette surface soit une fonction de x , on démontrera, comme nous l'avons fait pour la pyramide, que l'élément du solide a pour expression $\varphi x \cdot dx$.

De l'intégration des fonctions de deux variables.

285. Nous avons vu que toute différentielle, pour être intégrable, devait être de la forme $\varphi x dx$; ainsi on serait arrêté dans l'intégration d'une équation, si elle renfermait des termes tels que $y^2 dx$, $xy dx$, $\frac{dx}{y}$, etc. Cependant il ne faudrait pas conclure qu'elle n'est pas susceptible d'intégration; car, si par des opérations algébriques on pouvait faire en sorte que chaque terme ne contint plus qu'une seule variable, l'intégration pourrait s'effectuer ensuite. L'équation $xdy + ydx = 0$, est dans ce cas. En effet, si on divise cette équation par xy , elle devient

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0;$$

et en intégrant, elle donne $\log y + \log x = C$; et en représentant par A le nombre dont C est le logarithme, on peut écrire $\log y + \log x = \log A$, et par conséquent

$$\log xy = \log A;$$

passant aux nombres, on a

$$xy = A.$$

286. Soit l'équation plus générale

$$\varphi x \cdot dy + Fy \cdot dx = 0;$$

pour séparer les variables on divisera cette équation par $\varphi x \cdot Fy$, et l'on trouvera

$$\frac{dy}{Fy} + \frac{dx}{\varphi x} = 0,$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

287. Pour en donner un exemple, proposons-nous d'intégrer

$$(1 + x^2) \cdot dy = dx \sqrt{y};$$

en divisant par $(1 + x^2) \sqrt{y}$, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{1 + x^2};$$

et en intégrant cette équation, on obtiendra

$$2\sqrt{y} = \text{arc tang } x + C.$$

288. On séparerait encore les variables par la division dans la formule

$$\varphi x \cdot Fy \cdot dx + \varphi'x \cdot Fy \cdot dy = 0;$$

pour cela, il suffirait de diviser par $Fy \cdot \varphi'x$, et l'on aurait

$$\frac{\varphi x}{\varphi'x} dx + \frac{Fy}{Fy} dy = 0.$$

Ce procédé est applicable à l'équation

$$x^2 y dx + (3y + 1) dy \sqrt{x^2} = 0,$$

car si on la divise par $y \sqrt{x^2}$, on obtient

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2}} dx + \frac{(3y + 1)}{y} dy = 0.$$

289. La séparation des variables peut toujours s'effectuer très-facilement dans les équations à deux variables,

lorsqu'elles sont homogènes. Une équation homogène est celle dans laquelle tous les termes considérés par rapport aux variables sont de mêmes dimensions : ainsi l'équation

$$ax^2y^3 + bx^4 + cy^3x^5 = 0$$

est une équation homogène, puisque la somme des exposants de x et de y étant égale à 5 dans chaque terme, tous les produits x^2y^3 , x^4 , etc., sont chacun de cinq dimensions.

L'équation

$$ax^6y^2 - bx^5y^3 + cy^8 = 0$$

est aussi homogène, puisque la somme des exposants des variables dans chaque terme est 8. La variable x n'entre pas dans le dernier terme de l'équation, mais cette variable peut être considérée comme élevée à la puissance zéro.

290. Soit en général

$$Mdx + Ndy = 0 \dots (77),$$

une équation dans laquelle les coefficients M et N sont composés de termes homogènes, tels que $Ax^p y^q$, $Bx^p y^q$, $Cx^p y^q$, etc. Si nous représentons par n la somme des exposants de x et de y , dans un de ces termes, nous aurons, en vertu de l'homogénéité,

$$p + q = n, p' + q' = n, p'' + q'' = n, \text{ etc.}$$

Cela posé, si nous divisons tous les termes par x^n , l'égalité subsistera encore, et le terme $Ax^p y^q$ deviendra

$$\frac{Ax^p y^q}{x^n} = \frac{Ay^q}{x^{n-p}},$$

et comme la première équation de condition nous donne

$n - p = q$, l'expression précédente deviendra

$$\frac{A_1^q}{x^q} = A \left(\frac{y}{x} \right)^q.$$

Ce que nous disons de ce terme, étant applicable à tous les autres, l'équation (77) pourra s'écrire ainsi :

$$q \left(\frac{y}{x} \right) dx + F \left(\frac{y}{x} \right) dy = 0,$$

et si nous faisons $\frac{y}{x} = z$, ce qui revient à supposer que dans la proposée on mette zx à la place de y , cette équation deviendra

$$dx qz + dy Fz = 0,$$

ou plutôt

$$qz + Fz \frac{dy}{dx} = 0 \dots (78).$$

Pour achever d'éliminer y au moyen de l'équation $y = zx$, nous différencierons cette équation, et nous obtiendrons

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx};$$

cette valeur réduit l'équation (78) à

$$qz + Fz \left(z + x \frac{dz}{dx} \right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{x dz}{dx} = - \frac{qz}{Fz} - z = - \frac{(qz + zFz)}{Fz},$$

et, en séparant les variables,

$$\frac{dx}{x} = - \frac{dz Fz}{qz + zFz},$$

et par conséquent

$$\log x = - \int \frac{dz Fz}{qz + zFz} + C,$$

Lorsqu'on aura intégré il ne s'agira plus que de mettre dans le résultat la valeur de z .

291. Prenons pour exemple l'équation $x^2 dy = y^2 dx + xy dx$: en faisant $y = zx$, nous trouverons

$$dy = z dx + x dz,$$

et, en substituant ces valeurs, l'équation deviendra

$$x^2 z dx + x^3 dz = x^2 x^2 dx + x x^2 dx;$$

réduisant et divisant par x^3 , facteur commun, on obtiendra

$$x dz = z^2 dx;$$

cette équation, étant divisée par z^3 et par x , donne

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^3},$$

et en intégrant, on aura

$$\log x = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\frac{y}{x}} + C = -\frac{x}{y} + C.$$

292. Prenons pour second exemple l'équation

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} dy = y dx;$$

en faisant disparaître le dénominateur on voit que tous les termes de cette équation sont de deux dimensions, ainsi nous supposerons $y = zx$, et en réduisant, cette équation nous donnera

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{(1 - z)}{(1 + z)};$$

mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur tirée de l'équation $y = zx$, on aura

$$z + \frac{x dz}{dx} = \frac{z(1 - z)}{1 + z},$$

transposant z dans le second membre et réduisant au même dénominateur, on trouvera

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(1 + z)}{2z^2} dz,$$

et enfin

$$\begin{aligned}\log x &= -\int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} \log z + C \\ &= \frac{x}{2y} + \frac{1}{2} \log \frac{y}{x} + C.\end{aligned}$$

293. Lorsque l'équation proposée, entre les termes $Ax^p y^q, Bx^p y^q$ + etc., contient des polynômes tels que

$$(Mx^r y^s + Nx^r y^s + \text{etc.})^k dx, (x^t y^u + Qx^t y^u + \text{etc.})^l dy,$$

les variables seront encore séparables si l'on a

$$p + q = p' + q' = (r + s)k = (t' + s')k = (t + u)l = (t' + u')l \dots (79).$$

Pour le démontrer, faisons

$$(r + s)k = n, (r' + s')k = n \dots (80),$$

et divisons par x^n tous les termes du polynôme

$$(Mx^r y^s + Nx^r y^s + \text{etc.})^k,$$

ce polynôme deviendra

$$\left(\frac{Mx^r y^s + Nx^r y^s + \text{etc.}}{x^{\frac{n}{k}}} \right)^k = \left(\frac{My^s}{x^{\frac{n}{k} - r}} + \frac{Ny^s}{x^{\frac{n}{k} - r'}} + \text{etc.} \right)^k;$$

or, les équations (80) nous donnent

$$\frac{n}{k} - r = s, \frac{n}{k} - r' = s';$$

substituant ces valeurs dans l'expression précédente, nous trouverons

$$\left(My^s + Ny^s + \text{etc.} \right)^k = \left[M \left(\frac{y}{x} \right)^s + N \left(\frac{y}{x} \right)^{s'} + \text{etc.} \right]^k,$$

ce qui prouve que lorsque les équations (79) ont lieu, les polynômes élevés à des puissances se réduisent comme les autres termes à des fonctions de $\frac{x}{y}$.

Par conséquent, en faisant $\frac{y}{x} = z$ ou plutôt $y = xz$, l'équation peut se réduire à une fonction de z . Pour en donner un exemple, soit

$$x^2 y - y^2 dx = dx \sqrt{x^2 - y^2} \dots (81).$$

Cette équation écrite ainsi :

$$x^1 y^0 dy - y^1 x^0 dx = dx (x^2 y^0 - x^0 y^2)^{\frac{1}{2}},$$

on voit que les équations (79) sont satisfaites ; ainsi nous ferons $y = zx$, et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = z - \frac{dz}{dx};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (81), réduisant et divisant par le facteur commun, on obtiendra

$$-\frac{dz}{dx} = \sqrt{1-z^2},$$

et par conséquent,

$$dx = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

intégrant, on trouvera, art. 198,

$$x = \arccos(z) + C,$$

on, en remettant la valeur de z ,

$$x = \arccos\left(\cos \frac{y}{x}\right) + C.$$

294. En général, lorsqu'on a une fonction homogène des variables x, y, z , on peut toujours séparer l'une des variables, par exemple x , en faisant $y = tx, z = ux$ *.

295. On emploie quelquefois des exposants indétermini-

* Voici ce calcul : soit $Mdx + Ndy + Pdz = 0$, une équation homogène dans laquelle M, N, P , sont des fonctions des trois variables x, y, z ; ces fonctions M, N, P , contiendront des termes tels que $Ax^p y^q z^r$, $Bx^{p'} y^{q'} z^{r'}$, $Cx^{p''} y^{q''} z^{r''}$, et l'on aura $p + q + r = p' + q' + r' = p'' + q'' + r'' = n$. Si dans l'un de ces termes, par exemple, dans $Ax^p y^q z^r$, on substitue les valeurs $y = tx, z = ux$, ce terme deviendra

$$Ax^p (tx)^q (ux)^r = x^{p+q+r} \times At^q u^r = x^n At^q u^r;$$

la même chose ayant lieu pour les autres termes, si l'on y substitue

nés pour rendre une équation homogène : soit par exemple l'équation

$$ay^m x^n dx + bx^p dx + Cx^q dy = 0;$$

on supposera $y = z^k$, et comme l'exposant k n'est pas une variable, mais une constante inconnue, on différenciera par l'art. 21, et l'on aura

$$dy = kz^{k-1} dz \text{ et } y^m = z^{km};$$

en substituant, on obtiendra

$$az^{km} x^n dx + bx^p dx + C^k x z^{k-1} dz = 0;$$

cette équation sera homogène si l'on a

$$km + n = p, \quad q + k - 1 = p;$$

éliminant l'indéterminée k , on trouvera

$$\frac{p-n}{m} = p + 1 - q,$$

équation de condition qui doit avoir lieu pour que la proposée puisse être homogène par la substitution de $y = z^k = x^{p+1-q}$.

296. Lorsqu'on a une équation différentielle $Mdx + Ndy = 0$, on ne peut pas affirmer qu'il existe toujours une équation qui étant différenciée donnera la pro-

les valeurs de y et de z , l'équation $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ aura x^n pour facteur; supprimant ce facteur commun, elle prendra la forme

$$\varphi(t, u) dx + F(t, u) dt + f(t, u) du = 0,$$

et en exécutant les différentiations indiquées, on aura

$$\varphi(t, u) dx + F(t, u) (tdx + xdt) + f(t, u) (udx + xdu) = 0,$$

d'où l'on tirera

$$[\varphi(t, u) + tF(t, u) + uf(t, u)] dx = -x [F(t, u)dt + f(t, u)du],$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{x} = - \frac{F(t, u) dt + f(t, u) du}{\varphi(t, u) + tF(t, u) + uf(t, u)}.$$

posée, car si l'on différencie, par exemple, l'équation $f(x, y) = 0$, et qu'on en tirât $m dx + n dy = 0$, on pourrait multiplier cette équation par une fonction de x et obtenir une équation $M dx + N dy = 0$, dont les coefficients M et N seraient différens de m et de n ; par conséquent l'équation $M dx + N dy = 0$, ne résulterait plus du seul procédé de la différenciation de

$$f(x, y) = 0.$$

Il en serait de même si l'on combinait arbitrairement $m dx + n dy = 0$, avec l'équation primitive $f(x, y) = 0$: par exemple, en éliminant un ou plusieurs termes entre $m dx + n dy = 0$ et $f(x, y) = 0$, on pourrait obtenir une équation

$$M' dx + N' dy = 0,$$

dans laquelle les coefficients différentiels M' et N' seraient différens de m et de n .

297. Une équation qui telle que $m dx + n dy = 0$, a été obtenue par le seul procédé de la différenciation, se nomme une différentielle exacte; il en est de même de toute fonction différentielle qui ne serait pas égale à zéro, mais qu'on aurait trouvée par le seul moyen de la différenciation. Lorsqu'une équation différentielle $M dx + N dy = 0$, n'est pas une différentielle exacte, on ne peut songer à l'intégrer que lorsqu'on l'a rendue une différentielle exacte par quelque opération préparatoire.

298. Euler résolut le premier ce problème important:

1°. Une équation différentielle étant donnée, déterminer comment on peut reconnaître lorsqu'elle est exacte;

2°. *Quel est le moyen d'intégrer cette équation ?*

Avant que de donner une solution de ce problème, je rappellerai que d'après notre convention, art. 52, l'expression $\frac{dz}{dx}$ nous indique que la fonction z de x et de y , a été différenciée par rapport à x , et divisée par dx ; si ensuite cette fonction $\frac{dz}{dx}$ est différenciée par rapport à une autre variable y et divisée par dy , nous écrirons ainsi le résultat de cette opération : $\frac{d^2z}{dx dy}$. Si au contraire on eût pris d'abord le coefficient différentiel de z par rapport à y , et ensuite par rapport à x , on aurait écrit ainsi le résultat de cette opération : $\frac{d^2z}{dy dx}$.

Lorsque z est une fonction de trois variables x, y, u ; une expression telle que $\frac{d^3z}{dx dy du}$ indique qu'on a pris d'abord le coefficient différentiel de z par rapport à x , et ensuite le coefficient différentiel de $\frac{dz}{dx}$ par rapport à y , et enfin, le coefficient différentiel de $\frac{d^2z}{dx dy}$ par rapport à u . Pareillement l'expression $\frac{d^5z}{dx^2 dy^3}$, indique qu'on a effectué cinq différentiations successives sur z , les deux premières par rapport à x , et les trois autres par rapport à y .

299. Cela posé, le théorème d'Euler repose sur le lemme suivant :

Si l'on a une fonction z de deux variables x et y , et qu'on prenne le coefficient différentiel de z , d'abord par rapport à x , et qu'on prenne ensuite le coefficient différentiel de $\frac{dz}{dx}$, par rapport à y , on aura le même résul-

tel que si l'on eût d'abord pris le coefficient différentiel de z par rapport à y et ensuite le coefficient différentiel de $\frac{dz}{dy}$ par rapport à x : c'est ce qu'on exprime en disant que

$$\frac{d^2z}{dx dy} = \frac{d^2z}{dy dx}.$$

300. Voici une démonstration de ce lemme : soit $f(x, y) = z$; si x devient $x + h = x'$, on a

$$f(x', y) = z + Ph + Qh^2 + Rh^3 + \text{etc....} \quad (82);$$

retranchant l'équation primitive, il reste

$$f(x', y) - f(x, y) = Ph + Qh^2 + Rh^3 + \text{etc..} \quad (83);$$

si y devient ensuite $y + k = y'$, le premier membre de l'équation (83) se change en

$$f(x', y') - f(x, y').$$

A l'égard du second membre, pour en obtenir la valeur dans cette nouvelle hypothèse, nous remarquerons que P, Q, R étant des fonctions de y , il faut changer

$$P \text{ en } P + P'k + P''k^2 + \text{etc.} \dots \quad (84),$$

$$Q \text{ en } Q + Q'k + Q''k^2 + \text{etc.},$$

$$R \text{ en } R + R'k + R''k^2 + \text{etc.};$$

en substituant ces valeurs, l'équation (83) devient

$$\begin{aligned} f(x', y') - f(x, y') &= Ph + P'kh + P''k^2h + \text{etc.}, \\ &+ Qh^2. \dots + Q'kh^2 + \text{etc.}, \\ &+ Rh^3. \dots + \text{etc.}, \\ &+ \text{etc.} \dots + \text{etc.}; \end{aligned}$$

retranchant l'équation (83) de celle-ci, il en résultera

$$\begin{aligned} f(x', y') - f(x, y) - f(x, y') + f(x, y) &= P'kh + P''k^2h + \text{etc.} \quad (85), \\ &+ Q'kh^2 + \text{etc.}, \\ &+ \text{etc.}; \end{aligned}$$

D'après les développemens (82) et (84), on voit que

$$P = \frac{dz}{dx} \text{ et que } P' = \frac{dP}{dy} = \frac{d^2z}{dx dy}.$$

Si l'on fait le même calcul, en substituant d'abord y' à y , et ensuite x' à x , $f(x, y)$ deviendra par la première substitution, $f(x, y')$; retranchant la fonction primitive, on aura

$$f(x, y') - f(x, y);$$

changeant x en x' , dans ce résultat, on aura un nouveau résultat duquel retranchant celui-ci, il restera

$$f(x', y') - f(x', y) - f(x, y') + f(x, y).$$

Par un calcul analogue à celui qui précède, on trouvera que cette expression est égale à un développement qu'on peut représenter par

$$\begin{aligned} P_1 h k + P_{11} h^2 k + \text{etc.}, \\ + Q_1 h k^2 + \text{etc.}, \\ + \text{etc.}; \end{aligned}$$

de sorte que nous aurons

$$f(x', y') - f(x', y) - f(x, y') + f(x, y) = P_1 h k + P_{11} h^2 k + \text{etc.} \\ + Q_1 h k^2 + \text{etc.}$$

En comparant cette équation à l'équation (85), on voit que les termes de leurs premiers membres, quoique disposés dans un ordre différent, sont égaux, d'où l'on peut conclure que

$$\begin{aligned} P' k h + P'' k^2 h + \text{etc.} &= P_1 h k + P_{11} h^2 k + \text{etc.} \\ + Q' k h^2 + \text{etc.} &+ Q_1 h k^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Cette équation ayant lieu quels que soient h et k , il faut que $P' k h = P_1 h k$, ou que $P' = P_1$. Or nous avons vu que $P' = \frac{d^2z}{dx dy}$; et comme il serait facile de reconnaître de

même que $P = \frac{d^2z}{dy dx}$, il suit de là que

$$\frac{d^2z}{dx dy} = \frac{d^2z}{dy dx}.$$

301. Si l'on a, par exemple, $z = x^2 + xy$, on trouve

$$\frac{dz}{dx} = 2x + y, \quad \frac{dz}{dy} = x,$$

et par conséquent,

$$\frac{d^2z}{dx dy} = 1 = \frac{d^2z}{dy dx}.$$

302. Cela posé, soit z la fonction dont la différentielle est $Mdx + Ndy$, on a

$$M = \frac{dz}{dx}, \quad N = \frac{dz}{dy}.$$

La première de ces équations différenciée par rapport à y , donnera

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2z}{dx dy};$$

la seconde différenciée par rapport à x , donnera

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d^2z}{dy dx};$$

les seconds termes de ces équations étant identiques, il en résulte que

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx};$$

Toutes les fois que cette équation de condition aura lieu, la différentielle proposée sera exacte.

303. Je reconnais, par exemple, que l'expression $(2x - y) dx - x dy$, est une différentielle exacte, parce que

$$\frac{dM}{dy} = -1 = \frac{dN}{dx}.$$

L'expression

$$(y^2 + 3x^2) dx + (3y^2 + 2xy) dy,$$

est aussi une différentielle exacte, car

$$\frac{dM}{dy} = 2y = \frac{dN}{dx}.$$

304. L'équation $ydx - xdy = 0$, n'est pas une différentielle exacte, puisque $\frac{dM}{dy} = 1$ et que $\frac{dN}{dx} = -1$. En effet, cette équation dérive de celle-ci :

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0,$$

trouvée immédiatement par la différentiation et dans laquelle on a supprimé le diviseur commun y^2 ; en le restaurant on aura $M = \frac{1}{y}$, $N = -\frac{x}{y^2}$, et la condition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ sera remplie.

305. Proposons-nous maintenant d'intégrer une différentielle à deux variables lorsqu'il a été reconnu qu'elle est exacte. Pour cet effet, nous remarquerons d'abord que lorsqu'une fonction z de x et de y , par la différentiation, a donné $Mdx + Ndy$, le terme Mdx a été obtenu, en regardant y comme constant. Par conséquent, lorsque nous intégrerons la partie Mdx , la constante que nous ajouterons pourra renfermer y , et en la représentant par Y , sauf, si le cas l'exige, à regarder Y comme une constante ordinaire, nous écrirons

$$u = \int Mdx + Y = 0 \dots (86).$$

Cette équation étant celle qui, par la différentiation, a dû nous donner $Mdx + Ndy = 0$, il suit de là que N n'est autre chose que le coefficient différentiel de $\int Mdx + Y$, par rapport à y .

En effectuant cette différentiation nous aurons

$$N = \frac{d}{dy} \int Mdx + \frac{dY}{dy};$$

on tire de cette équation

$$\frac{dY}{dy} = N - \frac{d \int M dx}{dy},$$

et en intégrant

$$Y = \int \left(N - \frac{d \int M dx}{dy} \right) dy;$$

cette valeur de Y étant mise dans l'équation (86), nous obtiendrons

$$u = \int M dx + \int \left(N - \frac{d \int M dx}{dy} \right) dy \dots (87).$$

Il est à observer que $N - \frac{d \int M dx}{dy}$ ne renferme pas x , puisqu'autrement Y ne pourrait être une fonction de la seule variable y .

306. Pour démontrer que l'expression $N - \frac{d \int M dx}{dy}$, n'est pas une fonction de x , nous en prendrons le coefficient différentiel par rapport à x , et nous aurons

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d \left(\frac{d \int M dx}{dy} \right)}{dy dx} \dots (88);$$

et en changeant l'ordre des différentiations, la seconde partie de cette expression deviendra

$$\frac{d \left(\frac{d \int M dx}{dx dy} \right)}{dx dy} = \frac{d \left(\frac{\frac{d \int M dx}{dx}}{dy} \right)}{dy};$$

or, l'intégrale $\int M dx$ ayant été prise par rapport à x , la différentielle de $\int M dx$, relativement à la même variable x , sera $M dx$,

donc $\frac{d \int M dx}{dx} = M$, ce qui réduit l'expression $\frac{d \left(\frac{d \int M dx}{dx} \right)}{dy}$ à $\frac{dM}{dy}$; substituant cette valeur dans l'expression (88), nous aurons $\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}$; or, cette quantité est nulle d'après l'équation de condition d'intégrabilité, d'où il suit que la différentielle de $N - \frac{d \int M dx}{dy}$ par rapport à x , est nulle, ce qui prouve que cette expression ne renferme pas x .

307. Au moyen de la formule (87), on peut intégrer toute fonction de deux variables, qui satisfait à la condition d'intégrabilité. Prenons pour exemple,

$$(6xy - y^2) dx + (3x^2 - 2xy) dy \dots (89).$$

En comparant cette expression à la formule $Mdx + Ndy$ nous avons

$$6xy - y^2 = M, \quad 3x^2 - 2xy = N. \dots (90).$$

Par conséquent, la condition d'intégrabilité est remplie, puisque l'on trouve

$$\frac{dM}{dy} = 6x - 2y = \frac{dN}{dx};$$

intégrant l'expression $(6xy - y^2) dx$ dans l'hypothèse où y constant, nous aurons

$$\int M dx = \int (6xy - y^2) dx = 3x^2y - y^2x;$$

substituant cette valeur et celle de N dans l'équation (87), nous obtiendrons

$$u = 3x^2y - y^2x + \int \left[3x^2 - 2xy - \frac{d(3x^2y - y^2x)}{dy} \right] dy.$$

La partie affectée du signe d'intégration, en exécutant la différentiation indiquée, se réduit à

$$\int (3x^2 - 2xy - 3x^2 + 2yx) dy,$$

et en ôtant le signe d'intégration, on a une différentielle dont les termes se détruisent : il résulte de là que l'expression représentée par

$$\int \left(3x^2 - 2xy - \frac{d(3x^2y - y^2x)}{dy} \right) dy,$$

est constante, vu que toute quantité dont la différentielle est nulle est constante; d'où il suit que l'intégrale cherchée est $3x^2y - y^2x + \text{constante}$.

308. Si l'on n'eût pas voulu employer la formule trouvée par l'article précédent, on aurait pu faire directement le calcul de la manière suivante :

On intégrera l'expression (89) en regardant y comme constant, et l'on aura

$$\int M dx = \int (6xy - y^2) dx + Y,$$

ou

$$u = 3x^2y - y^2x + Y \dots (91);$$

différenciant cette équation par rapport à y , on obtiendra

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy + \frac{dY}{dy} \dots (92):$$

$\frac{du}{dy}$ étant autre chose que le coefficient de dy dans l'expression (89), nous avons aussi

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy;$$

comparant ces valeurs, nous trouverons $\frac{dY}{dy} = 0$, et par conséquent $Y = \text{constante}$; mettant cette valeur dans l'équation (91), nous trouverons

$$u = 3x^2y - y^2x + \text{constante}.$$

309. Soit encore la fonction

$$(2y^2x + 3y^3) dx + (2x^2y + 9xy^2 + 8y^3) dy;$$

si on la compare à l'expression $Mdx + Ndy$, on trouvera

$$M = 2y^2x + 3y^3, \quad N = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3;$$

et comme l'on a

$$\frac{dM}{dy} = 4yx + 9y^2 = \frac{dN}{dx},$$

la fonction proposée est une différentielle exacte. Intégrant par rapport à x , nous aurons

$$\int Mdx = y^2x^2 + 3y^3x + Y,$$

ou

$$u = y^2x^2 + 3y^3x + Y;$$

différenciant cette expression par rapport à y , il viendra

$$\frac{du}{dy} = \frac{d(y^2x^2 + 3y^3x)}{dy} + \frac{dY}{dy};$$

d'une autre part $\frac{du}{dy}$ représentant le coefficient de dy dans l'équation proposée, nous aurons encore

$$\frac{du}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3;$$

de ces deux valeurs de $\frac{du}{dy}$ on tire cette équation

$$\frac{d(y^2x^2 + 3y^3x)}{dy} + \frac{dY}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3,$$

et en effectuant la différentiation indiquée par rapport à y , on a

$$2x^2y + 9y^2x + \frac{dY}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3,$$

équation qui se réduit à $\frac{dY}{dy} = 8y^3$;

donc

$$Y = \int 8y^3 dy = 2y^4 + C,$$

et par conséquent l'intégrale cherchée est

$$u = y^2x^2 + 3y^3x + 2y^4 + C.$$

310. On a vu, art. 304, que l'équation $ydx - xdy$

$= 0$, n'était pas une différentielle exacte, parce que cette équation avait perdu le facteur commun $\frac{1}{y}$; on sent donc qu'il peut exister des équations qui, telles que celles-ci, ne sont pas immédiatement intégrables, mais qui le deviendraient si on pouvait restituer ce facteur.

311. Soit en général l'équation $Pdx + Qdy = 0$, qui est une différentielle exacte, et z le facteur commun, que pour plus de généralité nous supposons une fonction de x et de y , nous aurons

$$P = Mz, \quad Q = Nz.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation précédente, le facteur commun z disparaîtra, et l'on aura

$$Mdx + Ndy = 0. \dots (93).$$

L'équation $Pdx + Qdy = 0$ étant une différentielle exacte par hypothèse, on aura

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx};$$

mettant pour P et pour Q leurs valeurs, cette équation deviendra

$$\frac{dMz}{dy} = \frac{dNz}{dx},$$

et en développant on trouvera

$$\frac{Mdz}{dy} + \frac{zdM}{dy} = \frac{Ndz}{dx} + \frac{zdN}{dx} \dots (94).$$

Lorsque le facteur commun z est constant, $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dz}{dx}$ étant nuls, l'équation (94) devient

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx},$$

et par conséquent la condition nécessaire pour que l'équation (93) soit une différentielle exacte, est remplie

Mais lorsque z est une fonction de x et de y , la détermination de z dépend de l'équation (94). Or, cette équation est plus difficile à intégrer que la proposée qui ne renferme que le seul coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, tandis que l'équation (94) renferme les deux coefficients différentiels $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ et contient trois variables x, y, z .

312. Si le facteur commun n'est fonction que de x , on a $\frac{dz}{dy} = 0$, ce qui réduit l'équation (94) à

$$z \frac{dM}{dy} = \frac{N dz}{dx} + z \frac{dN}{dx},$$

d'où l'on tire

$$\frac{N dz}{dx} = z \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right),$$

et par conséquent

$$\int \frac{dz}{z} = \int \left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} \right) dx \dots (95);$$

en intégrant on a

$$\log z = \int \left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} \right) dx = \int \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) dx;$$

multipliant par $\log e$, changeant le coefficient de $\log e$ en exposant, et passant aux nombres, on trouve

$$z = e^{\int \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) dx}.$$

Il ne s'agira donc plus que de multiplier l'équation proposée par ce facteur z , pour qu'elle devienne une différentielle exacte.

313. Soit, par exemple, $ydx - xdy = 0$, on obtient

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 2,$$

ce qui réduit la formule (95) à

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dx}{-x};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\log z = -2 \log x + \log C = -\log x^2 + \log C = \log \frac{C}{x^2},$$

et en passant aux nombres, on trouve $z = \frac{C}{x^2}$; par conséquent l'expression $\frac{C(ydx - xdy)}{x^2}$ sera une différentielle exacte.

314. On peut trouver une infinité de facteurs qui jouissent de la même propriété. En effet, soit z un facteur qui rendra exacte l'équation $Mzdx + Nzdy = 0$; en représentant par u l'intégrale de cette équation, nous aurons

$$Mzdx + Nzdy = du;$$

multipliant les deux membres par φu , nous obtiendrons

$$\varphi u (Mzdx + Nzdy) = \varphi u du.$$

La forme de φu étant arbitraire, nous pourrions faire, par exemple, $\varphi u = 2u^2$, et alors $2u^2 du$ étant une différentielle exacte

$$2u^2 (Mzdx + Nzdy) = 2u^2 du,$$

en sera aussi une; donc le facteur $2u^2$ aura la propriété de rendre intégrable l'expression

$$Mdx + Ndy = 0.$$

On voit qu'on peut faire une infinité d'autres hypothèses sur φu .

315. Cherchons maintenant les conditions d'intégrabilité d'une équation différentielle à trois variables. Nous avons

$$du = Mdx + Ndy + Pdz,$$

et par conséquent

$$M = \frac{du}{dx}, N = \frac{du}{dy}, P = \frac{du}{dz}.$$

On peut combiner deux à deux, ces équations de trois manières différentes :

$$1^{\circ}. \frac{du}{dx} = M \text{ et } \frac{du}{dy} = N; \quad 2^{\circ}. \frac{du}{dx} = M \text{ et } \frac{du}{dz} = P;$$

$$3^{\circ}. \frac{du}{dy} = N \text{ et } \frac{du}{dz} = P.$$

Par une démonstration analogue à la précédente, on déduira de ces équations, celles-ci :

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy} \dots (96).$$

En général, s'il y a n variables, on aura autant d'équations de condition que ces variables peuvent donner de produits distincts deux à deux, et par conséquent $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition.

316. Une différentielle exacte de trois variables étant donnée, voici la méthode que je crois que l'on pourrait suivre pour obtenir la fonction dont elle dérive. Soit

$$yzdx + (xz + zy) dy + (xy + zx) dz. \dots (97),$$

une différentielle qui satisfait aux équations (97) de condition. Nous intégrerons d'abord l'expression (97) par rapport à la seule variable x , et nous aurons

$$u = \int yzdx + F(y, z),$$

on

$$u = yzx + F(y, z). \dots (98);$$

donc

$$\frac{du}{dy} = zx + \frac{dF(y, z)}{dy};$$

et comme on a aussi

$$\frac{du}{dy} = xz + zy,$$

nous obtiendrons, en égalant ces valeurs,

$$\frac{dF(y, z)}{dy} = 2y,$$

et par conséquent

$$dF(y, z) = 2y dy;$$

intégrant par rapport à y , il viendra

$$F(y, z) = y^2 + \varphi z;$$

substituant cette valeur dans l'équation (98), on aura

$$u = 2xz + y^2 + \varphi z. \dots (99).$$

Cette équation différenciée par rapport à z donne

$$\frac{du}{dz} = 2y + \frac{d\varphi z}{dz};$$

la valeur de ce coefficient différentiel étant comparée à celle-ci

$$\frac{du}{dz} = 2y + 2z,$$

on a

$$\frac{d\varphi z}{dz} = 2z;$$

multipliant par dz et intégrant, on trouvera

$$\varphi z = \int 2z dz + C = z^2 + C;$$

mettant cette valeur dans l'équation (99), on obtiendra

$$u = 2xz + y^2 + z^2 + C.$$

Du développement des puissances des cosinus et des sinus en fonction des arcs multiples.

317. La théorie que nous allons développer reposant sur une formule imaginaire très-remarquable, nous commencerons par démontrer cette formule. Soit l'expression $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$ qui est le produit des deux facteurs $\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}$ et $\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1}$; si nous faisons $\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1} = F\varphi$, nous aurons, en différenciant,

$$\frac{dF\varphi}{d\varphi} = -\sin \varphi + \cos \varphi \sqrt{-1};$$

cette équation étant multipliée par $-\sqrt{-1}$, devient

$$-\frac{dF_{\varphi}}{d\varphi}\sqrt{-1} = \sin \varphi \sqrt{-1} + \cos \varphi;$$

et puisque par hypothèse son second membre est égal à F_{φ} , nous avons

$$-\frac{dF_{\varphi}}{d\varphi}\sqrt{-1} = F_{\varphi},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dF_{\varphi}}{F_{\varphi}} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}} \times \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = d\varphi \sqrt{-1};$$

et en intégrant, on trouve,

$$\log F_{\varphi} = \varphi \sqrt{-1} = (\varphi \sqrt{-1}) \log e = \log e^{\varphi \sqrt{-1}};$$

passant aux nombres, on a

$$F_{\varphi} = e^{\varphi \sqrt{-1}},$$

et en mettant pour F_{φ} sa valeur, on obtient

$$\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1} = e^{\varphi \sqrt{-1}} \dots (100).$$

Cette équation ayant lieu, quel que soit φ , on pourra changer φ en $m\varphi$, et l'on aura encore

$$\cos m\varphi + \sin m\varphi \sqrt{-1} = e^{m\varphi \sqrt{-1}}.$$

Il existe une autre expression de cette puissance imaginaire de e , car l'équation (100) étant élevée à la puissance m , nous donne

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^m = e^{(\varphi \sqrt{-1})m} = e^{m\varphi \sqrt{-1}}.$$

Les seconds membres de ces dernières équations étant les mêmes, on a en égalant les premiers,

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^m = \cos m\varphi + \sin m\varphi \sqrt{-1} \dots (101);$$

si l'on fait $\varphi = -\varphi$ dans les équations (100) et (101), ces équations deviendront

$$\cos -\varphi + \sin -\varphi \sqrt{-1} = e^{-\varphi \sqrt{-1}}$$

$$(\cos -\varphi + \sin -\varphi \sqrt{-1})^m = \cos -m\varphi + \sin -m\varphi \sqrt{-1}.$$

FIG. 61. Or, si φ est représenté par l'arc AD , fig. 61, $-\varphi$ le sera par AD' , et comme ces arcs ont les mêmes cosinus et des sinus de signes contraires, on aura

$$\cos -\varphi = \cos \varphi, \sin -\varphi = -\sin \varphi;$$

on prouverait de même que

$$\cos -m\varphi = \cos m\varphi, \text{ et que } \sin -m\varphi = -\sin m\varphi;$$

substituant ces valeurs dans les deux dernières équations de la page 237, on obtiendra

$$\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1} = e^{-\varphi} \sqrt{-1} \dots (102),$$

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})^m = \cos m\varphi - \sin m\varphi \sqrt{-1} \dots (103).$$

318. Cherchons maintenant le développement de $\cos^m x$ en fonction des arcs multiples de x , et sans employer les puissances des sinus et des cosinus. Pour cet effet, soient

$$\cos x + \sin x \sqrt{-1} = u \dots (104),$$

$$\cos x - \sin x \sqrt{-1} = v \dots (105);$$

ces équations étant ajoutées donnent

$$\cos x = \frac{1}{2}(u + v),$$

et par conséquent

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m} (u + v)^m, \cos^m x = \frac{1}{2^m} (v + u)^m;$$

développant ces binômes par la formule usitée, on obtient

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m} \left(u^m + mu^{m-1}v + m\frac{(m-1)}{2}u^{m-2}v^2 + \text{etc.} \right)$$

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m} \left(v^m + mv^{m-1}u + m\frac{(m-1)}{2}v^{m-2}u^2 + \text{etc.} \right);$$

ajoutant ces équations, on trouve

$$2^{m+1} \cos^m x = u^m + v^m + muv(u^{m-2} + v^{m-2}) \\ + m\frac{(m-1)}{2}u^2v^2(u^{m-4} + v^{m-4}) + \text{etc.} \dots (106).$$

On tire des formules (104) et (105),

$$u^m = (\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m, v^m = (\cos x - \sin x \sqrt{-1})^m;$$

mettant dans les seconds membres de ces équations leurs valeurs données par les formules (101) et (103), on a

$$u^m = \cos mx + \sin mx \sqrt{-1}, \nu^m = \cos mx - \sin mx \sqrt{-1}. (107),$$

done

$$u^m + \nu^m = 2 \cos mx, \text{ et } u^m \nu^m = 1,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots u \nu = 1, \\ u^{m-2} + \nu^{m-2} &= 2 \cos (m-2) x, u^{m-2} \nu^{m-2} = 1, \\ u^{m-4} + \nu^{m-4} &= 2 \cos (m-4) x, u^{m-4} \nu^{m-4} = 1, \\ \text{etc.} & \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (106), on trouvera

$$\begin{aligned} \cos^m x &= \frac{1}{2^{m+1}} \left[2 \cos mx + 2m \cos (m-2) x \right. \\ & \quad \left. + 2m \frac{(m-1)}{1.2} \cos (m-4) x + \text{etc.} \right] \dots (108). \end{aligned}$$

Ce développement provenant de celui de $(u + \nu)^m$, contient $m + 1$ termes; si l'on fait successivement $m = 2, m = 3, m = 4$, etc., et que l'on change les cosinus d'arcs négatifs en positifs, en vertu de l'équation $\cos - \varphi = \cos \varphi$, on formera le tableau suivant:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}, \\ \cos^3 x &= \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3 \cos x}{4}, \\ \cos^4 x &= \frac{\cos 4x}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

319. On peut abréger ces calculs, car les termes également distans des extrémités de la série, sont égaux. Pour le démontrer, nous remarquerons que les cosinus qui entrent dans l'équation (108) étant $\cos mx, \cos (m-2) x, \cos (m-4) x, \cos (m-2 \times 3) x$, etc., ou plutôt

$$\cos mx, \cos (m-2 \times 1) x, \cos (m-2 \times 2) x, \cos (m-2 \times 3) x, \text{ etc.}$$

en considérant les nombres qui suivent le signe x dans chaque terme de la série, on voit que l'un de ces nombres indique celui des termes précédens. Ainsi le terme qui en a n avant lui, sera affecté de

$\cos (m-2n)x$. A l'égard du terme qui en a n après lui, comme le nombre total des termes de la série est $m+1$, celui qui en a n après lui, tiendra le rang $m+1-n$, et par conséquent aura $m-n$ termes avant lui, donc il renfermera l'expression

$$\cos [m-2(m-n)]x = \cos (-m+2n)x,$$

et comme nous avons vu qu'on avait le droit de changer le signe de l'arc dont on a le cosinus, on aura

$$\cos (-m+2n)x = \cos (m-2n)x;$$

done les termes également distans des extrémités de la série, ont les mêmes cosinus, et comme ils ont aussi les mêmes coefficients * puisque ces coefficients sont ceux de la formule du binôme, il en résulte que ces termes sont égaux. Ainsi lorsque m est impair le nombre $m+1$ des termes de la série sera pair, et il suffira de doubler les $\frac{m+1}{2}$ premiers termes pour avoir la totalité des termes de la série; si m est pair, $m+1$ sera impair, alors on ajoutera au terme du milieu le double de ceux qui le précéderont. Ce terme tiendra le rang $\frac{m}{2}+1$ dans la série, et par conséquent il sera affecté de $\cos (m-m) = \cos 0 = 1$, donc il ne contiendra pas de cosinus.

320. Par un procédé analogue, on peut trouver le développement $\sin mx$. Pour cet effet, en retranchant l'équation (103) de l'équation (104), on trouve

$$2 \sin x \sqrt{-1} = u - v, \text{ donc } \sin x = \frac{u-v}{2\sqrt{-1}};$$

élevant les deux membres de cette équation à la puissance m , on aura

$$\sin^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m} (u-v)^m;$$

si m est égal à un nombre pair $2p$, on a

$$(u-v)^{2p} = [(u-v)^2]^p = [(\nu-u)^2]^p = (\nu-u)^{2p};$$

donc

$$(u-v)^m = (\nu-u)^m.$$

On développera les équations

$$\sin^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m} (u-v)^m \text{ et } \sin^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m} (\nu-u)^m,$$

* On peut le reconnaître en comparant le développement de $(a+b)^m$ à celui de $(b+a)^m$ écrit à rebours.

et opérant comme nous l'avons fait ci-dessus, on trouvera

$$\sin^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m} \left(\cos mx - m \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)x + \text{etc.} \right)$$

la quantité imaginaire $(2\sqrt{-1})^m$ disparaîtra du résultat, puisqu'elle est élevée à une puissance paire.

321. Si m est égal à un nombre impair $2p + 1$, on aura

$$\begin{aligned} (u - v)^{2p+1} &= (u - v)^{2p} \times (u - v) = (\nu - u)^{2p} \times -(\nu - u) \\ &= -(\nu - u)^{2p+1}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$(u - v)^m = -(\nu - u)^m,$$

et

$$\sin^m x = \frac{(u - v)^m}{(2\sqrt{-1})^m}, \sin^m x = -\frac{(\nu - u)^m}{(2\sqrt{-1})^m} \dots (109);$$

développant $(u - v)^m$ et $(\nu - u)^m$, par la formule du binôme, et substituant ces développemens dans les équations (109), qu'on ajoutera, on aura

$$2 \sin^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m} \left[u^m - \nu^m - \frac{m}{1} u \nu (u^{m-2} - \nu^{m-2}) + \text{etc.} \right] (110);$$

retranchant les équations (107) l'une de l'autre, multipliant ensuite entr'elles ces mêmes équations, et observant que la seconde opération nous donne la somme des carrés de $\sin mx$ et de $\cos mx$, qui équivaut à l'unité, on trouvera

$$u^m - \nu^m = 2 \sin mx \sqrt{-1}, u^m \nu^m = 1.$$

En opérant de la même manière que ci-dessus, on changera donc l'équation (110) en

$$\sin^m x = \frac{1}{2(2\sqrt{-1})^{m-1}} \left(\sin mx - \frac{m}{1} \sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sin(m-4)x + \text{etc.} \right).$$

Comme dans cette hypothèse m est impair, la puissance $m - 1$ à laquelle la quantité $2\sqrt{-1}$ est élevée est paire, ce qui fait évanouir l'imaginaire $\sqrt{-1}$.

*De l'intégration des quantités qui renferment
des sinus et des cosinus.*

322. On vient de démontrer que l'on pouvait obtenir les développemens de $\cos^2 x$, de $\cos^3 x$, de $\cos^4 x$, etc., en fonction des expressions $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, etc. On parviendrait au même résultat par la trigonométrie, de la manière suivante : si dans la formule

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \dots (111),$$

on fait $a = b$, on aura

$$\begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= 2 \cos^2 a - 1; \end{aligned}$$

on tire de là

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a;$$

multipliant cette équation par $\cos a$, elle devient

$$\cos^3 a = \frac{1}{2} \cos a + \frac{1}{2} \cos a \cdot \cos 2a \dots (112).$$

Or, si à l'équation (111), on ajoute celle-ci :

$$\cos(b - a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

on obtiendra

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(b - a);$$

faisant $b = 2a$, on aura $\cos a \cos 2a = \frac{1}{2} \cos 3a + \frac{1}{2} \cos a$; éliminant $\cos a \cos 2a$, entre cette équation et l'équation (112), on trouvera

$$\cos^3 a = \frac{3}{4} \cos a + \frac{1}{4} \cos 3a.$$

On calculerait par le même procédé les puissances supérieures de $\cos a$.

323. Cela posé, lorsqu'on aura à intégrer l'expression $\cos^m x dx$, dans laquelle m est un nombre entier, on mettra pour $\cos^m x$, son développement qui, d'a-

près ce qui précède, ne contiendra que des termes pris dans cette suite :

constante, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, etc., de sorte que tout se réduit à savoir intégrer un terme de la forme $mxdx$.

Pour cet effet, nous remarquerons que si dans l'équation

$$d \sin z = \cos z dz,$$

on fait $z = mx$, on aura

$$d \sin mx = \cos mx.mdx,$$

donc

$$\int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m}.$$

On trouverait de même que

$$\int \sin mx dx = -\frac{\cos mx}{m}.$$

Prenons pour exemple $\cos^2 x dx$: mettant pour $\cos^2 x$, sa valeur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$, nous aurons

$$\int \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

324. Si l'on voulait intégrer $\sin^m x dx$, on procéderait d'une manière analogue ; ou bien, en représentant par z l'arc complément de x , on aurait

$$x = \frac{1}{2} \pi - z \text{ et } dx = -dz, \sin x = \cos z;$$

on changerait donc la formule $\sin^m x dx$, en celle-ci : $-\cos^m z dz$, et l'on intégrerait comme ci-dessus.

325. Prenons le cas plus général $\sin^m x \cos^n x dx$; si m est pair on fera $m = 2m'$, et l'on aura à intégrer

$$\sin^{2m'} x \cos^n x dx = (1 - \cos^2 x)^{m'} \cos^n x dx.$$

On développera $(1 - \cos^2 x)^{m'}$, et en multipliant par

$\cos^n x dx$, on obtiendra une suite de termes, chacun de la forme $\cos^l x dx$; et l'on intégrera comme ci-dessus. Si m est impair on fera $m = 2m' + 1$, et l'on aura

$$\sin^m x \cos^n x dx = \sin^{2m'} x \cos^n x \sin x dx = (1 - \cos^2 x)^{m'} \cos^n x \times -d \cos x;$$

faisant $\cos x = z$, on changera cette expression en

$$- (1 - z^2)^{m'} z^n dz;$$

m' et n étant par hypothèse des entiers, on développera et on intégrera.

326. Pour appliquer ce procédé aux expressions

$$\frac{\cos^m x dx}{\sin^n x}, \quad \frac{\sin^n x dx}{\cos^m x};$$

comme la seconde rentre dans l'autre, en faisant $x =$

$\frac{\pi}{2} - z$, nous ne considérerons que la première. Si m est

pair nous supposerons $m = 2m'$, et nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{2m'} x dx}{\sin^n x} &= \frac{(1 - \sin^2 x)^{m'}}{\sin^n x} \\ &= \frac{1 - m' \sin^2 x + m' \frac{m'-1}{2} \sin^4 x^2 + \text{etc.}}{\sin^n x} dx, \end{aligned}$$

expression dont l'intégrale dépendra de celles de $\sin^l x dx$ et de $\frac{dx}{\sin^l x}$.

Nous savons intégrer la première, et nous verrons bientôt comment s'intègre la seconde. Si m est impair, en faisant $m = 2m' + 1$, on aura

$$\frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = \frac{(1 - \sin^2 x)^{m'} \cos x dx}{\sin^n x} = (1 - m' \sin^2 x + \text{etc.}) \frac{\cos x dx}{\sin^n x},$$

expression dont l'intégrale dépendra de celles de $\sin^l x$

$\cos x dx$ et de $\frac{dx \cos x}{\sin^k x}$; nous avons traité de la première, art. 124, occupons-nous de la seconde. Pour intégrer $\frac{dx \cos x}{\sin^k x}$, nous ferons $\sin x = z$; donc $dx \cos x = dz$, et par conséquent

$$\int \frac{dx \cos x}{\sin^k x} = \int \frac{dz}{z^k} = \int z^{-k} dz = \frac{z^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

A l'égard de l'intégrale de $\frac{dx}{\sin^k x}$, la même transformation changera cette expression en $\frac{dz}{z^k \sqrt{1-z^2}}$, formule que nous savons intégrer.

327. Enfin si l'on a à intégrer $\frac{dx}{\cos^m x \sin^n x}$, on multipliera cette expression par $\cos^a x + \sin^a x$, quantité qui équivaut à l'unité, et l'on aura

$$\frac{dx}{\cos^m x \sin^n x} = \frac{dx}{\cos^{m-a} x \sin^n x} + \frac{dx}{\cos^m x \sin^{n-a} x};$$

par là on diminuera de deux unités la somme des exposans du dénominateur; et, en répétant un certain nombre de fois cette opération et en mettant à part toutes les fractions qui dans leurs dénominateurs ne renferment qu'une puissance d'un sinus ou d'un cosinus, on arrivera enfin à des fractions dans lesquelles la somme des exposans du dénominateur sera 2 ou 1, suivant que $m+n$ est un nombre pair ou impair; dans le premier cas l'intégrale dépendra d'une expression de cette forme $\frac{dx}{\sin x \cos x}$ et dans l'autre d'une de celles-ci :

$$\frac{dx}{\cos x}, \frac{dx}{\sin x}.$$

Pour intégrer $\frac{dx}{\sin x \cos x}$, on multipliera le numérateur

par $\cos^2 x + \sin^2 x$, et l'on aura

$$\frac{dx}{\sin x \cos x} = dx \frac{\cos x}{\sin x} + dx \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{d \sin x}{\sin x} - \frac{d \cos x}{\cos x},$$

expression dont l'intégrale est

$$\log \sin x - \log \cos x + \log C = \log C \operatorname{tang} x.$$

Pour intégrer $\frac{dx}{\sin x}$, on fera $\cos x = z$, et l'on aura

$$dx = -\frac{dz}{\sin x} \text{ et } \frac{dx}{\sin x} = -\frac{dz}{\sin^2 x} = -\frac{dz}{1-z^2},$$

formule intégrable par la méthode des fractions rationnelles. A l'égard de $\frac{dx}{\cos x}$, on supposera $\sin x = z$, et l'on trouvera

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dz}{1-z^2}.$$

328. En général on peut toujours transformer les expressions qui contiennent des sinus et des cosinus en d'autres qui n'en renferment pas: pour cela, il suffit d'égaliser $\sin x$ ou $\cos x$ à une nouvelle variable z . Par exemple, si dans l'expression $\sin^m x \cos^n x dx$, on suppose $\sin x = z$, on aura

$$\cos x = \sqrt{1-z^2} \text{ et } dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

substituant, on trouvera

$$\begin{aligned} \sin^m x \cos^n x dx &= z^m (1-z^2)^{\frac{n}{2}} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz, \end{aligned}$$

expression qui se rapporte aux différentielles binomes.

On peut aussi appliquer immédiatement l'intégration par parties à ces sortes d'expressions.

329. Enfin les formules trigonométriques peuvent être aussi employées avec avantage dans de certains cas. Pour

intégrer, par exemple, $\sin mx \cos nx dx$, comme la trigonométrie, nous donne

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin (a + b) + \frac{1}{2} \sin (a - b);$$

en comparant l'expression $\sin mx \cos nx$, à cette formule, on trouvera

$$\sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \sin (m+n) x dx + \frac{1}{2} \sin (m-n) x dx,$$

et l'intégrale sera, art. 323,

$$C - \frac{1}{2} \frac{\cos (m+n) x}{m+n} - \frac{1}{2} \frac{\cos (m-n) x}{m-n}.$$

De l'intégration des quantités exponentielles et logarithmiques.

330. Il a été démontré, art. 37, qu'en prenant les logarithmes dans le système népérien, on avait $da^x = a^x dx \log a$, donc, réciproquement

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}.$$

Ceci peut nous servir pour intégrer l'expression générale $a^x X dx$, dans laquelle X est une fonction de x . Pour cet effet, nous écrirons ainsi cette expression : $X \cdot a^x dx$; et en intégrant par parties, nous aurons

$$\int X \cdot a^x dx = \frac{X \cdot a^x}{\log a} - \int \frac{a^x}{\log a} dX \dots (113).$$

Cela posé, en différenciant successivement la fonction X , nous en tirerons $dX = X' dx$, $dX = X'' dx$, etc.; donc

$$\int \frac{a^x}{\log a} dX \text{ ou } \int \frac{X'}{\log a} \cdot a^x dx = \frac{X'}{(\log a)^2} a^x - \int \frac{a^x}{(\log a)^2} dX;$$

substituant cette valeur à la place du dernier terme de l'équation (113), nous obtiendrons

$$\int X a^x dx = \frac{X \cdot a^x}{\log a} - \frac{X' \cdot a^x}{(\log a)^2} + \int \frac{a^x}{(\log a)^2} dX.$$

En continuant d'opérer de la sorte, nous parviendrons à ce développement

$$\int Xa^x dx = a^x \left(\frac{X}{\log a} - \frac{X'}{(\log a)^2} + \frac{X''}{(\log a)^3} - \frac{X'''}{(\log a)^4} \right. \\ \left. \dots \pm \frac{X^{(n)}}{(\log a)^{n+1}} \right) \mp \int \frac{a^x dX^{(n)}}{(\log a)^{n+1}}.$$

Si, en prenant la suite des coefficients différentiels $X', X'', X''' \dots X^{(n)}$, le dernier de ces coefficients est constant, on aura $dX^{(n)} = 0$, et alors la partie intégrale s'évanouira.

331. Prenons pour exemple $X = x^3$, d'où l'on déduit

$$X' = 3x^2, X'' = 2.3x, X''' \text{ ou } X^{(3)} = 3.2;$$

donc

$$\int x^3 a^x dx = a^x \left(\frac{x^3}{\log a} - \frac{3x^2}{(\log a)^2} + \frac{2.3x}{(\log a)^3} - \frac{2.3}{(\log a)^4} \right)$$

Si l'on fait a égal au nombre e qui est la base du système népérien, $\log a$ devient $\log e$, or, $\log e = 1$, en vertu de l'équation $e = e^{\log e}$; par conséquent

$$\int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 2.3x - 2.3).$$

332. On peut encore parvenir à un autre développement de $\int a^x \cdot X dx$. Pour cela faisons $\int X dx = P$, $\int P dx = Q$, $\int Q dx = R$, etc., et intégrons par parties, nous aurons

$$\int a^x \cdot X dx = a^x P - \int a^x \log a \cdot P dx \dots (114),$$

$$\int a^x \log a \cdot P dx = a^x \log a \cdot Q - \int a^x (\log a)^2 Q dx;$$

et en substituant, l'équation (114) deviendra

$$\int a^x X dx = a^x P - a^x \log a \cdot Q + \int a^x (\log a)^2 Q dx.$$

En continuant d'intégrer par parties, on aura en général

$$\int a^x X dx = a^x [P - Q \log a + R (\log a)^2 - \text{etc.}] \\ \dots \pm \int Z a^x (\log a)^n dx.$$

333. Si l'on applique cette formule au cas où $X = \frac{1}{x}$, on trouvera

$$P = -\frac{1}{4x^4}, Q = \frac{1}{3 \cdot 4x^3}, R = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4x^2}, Z = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4x},$$

donc

$$\int \frac{a^x dx}{x^4} = a^x \left[-\frac{1}{4x^4} - \frac{\log a}{3 \cdot 4x^3} - \frac{\log a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4x^2} \right] - \frac{\log a^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \int \frac{a^x dx}{x}.$$

L'intégrale de $\frac{a^x dx}{x}$ est une fonction transcendante qu'on n'a pu déterminer jusqu'à ce jour.

334. En général, on voit que quelque puissance négative et entière que l'on prenne pour exposant de x , on doit toujours tomber sur cette transcendante $\int \frac{a^x dx}{x}$; car dans les fonctions successives P, Q, R , etc., les exposants de x diminuant toujours d'une unité, la dernière de ces fonctions doit être de la forme $\frac{A}{x}$, et par conséquent la dernière intégrale sera

$$\int \frac{A a^x}{x} dx = A \int \frac{a^x dx}{x},$$

parce que A est constant.

Pour avoir une valeur approchée de l'intégrale de $\frac{A a^x dx}{x}$, on n'a d'autres moyens que de substituer dans cette expression le développement de a^x qui est, comme on l'a vu,

$$x \log a + \frac{x^2}{2} (\log a)^2 + \frac{x^3}{3} (\log a)^3 + \text{etc.},$$

et d'intégrer ensuite chaque terme.

335. Si dans l'équation $\frac{du}{u} = d \log u$, ou plutôt $du = u d \log u$, on fait $u = x^y$, on aura

$$dx^y = x^y d \log x^y ;$$

ainsi toutes les fois qu'on pourra décomposer une différentielle en deux valeurs dont l'une puisse être représentée par x^y et l'autre par $d \log x^y$, l'intégrale sera $x^y + C$.

336. L'intégration par parties peut aussi s'appliquer à celle de l'expression $X dx (\log x)^n$; car si l'on représente par X_1 l'intégrale de $X dx$, on aura

$$\int X dx (\log x)^n = X_1 (\log x)^n - n \int \frac{X_1}{x} dx (\log x)^{n-1}.$$

On fera dépendre à son tour cette dernière intégrale d'une autre, de la forme $\int X_2 dx (\log x)^{n-1}$, et ainsi de suite.

Théorie des constantes arbitraires.

337. Soit une équation différentielle $d^n F(x, y) = 0$ entre deux variables et leurs coefficients successifs, jusqu'à l'ordre n , on aura $d^n F(x, y) d^{n-1} F(x, y) = 0 \dots dF(x, y) = 0, F(x, y) = 0 \dots (115).$

$d^{n-1} F(x, y)$ étant l'intégrale de $d^n F(x, y)$, contient une constante arbitraire qui ne se trouve pas dans la première expression, et ainsi de suite jusqu'à $F(x, y) = 0$, qui contient n constantes arbitraires.

Ces n constantes arbitraires étant éliminées entre les équations (115), on obtiendra une équation $V = 0$, qui est l'équation différentielle de la fonction primitive $F(x, y) = 0$; mais si entre les équations $F(x, y) = 0, dF(x, y) = 0 \dots d^{n-1} F(x, y) = 0$, l'on élimine toutes les constantes, hors une seule que je représenterai par a , on aura une équation différentielle de l'ordre $n - 1$. En opérant de même à l'égard des autres constantes arbitraires, on trouvera en totalité un nombre n d'équations différentielles de l'ordre $n - 1$, et renfermant chacune une constante arbitraire différente. Ces équations sont les intégrales premières de l'équation $F(x, y) = 0$; d'où il résulte ce théorème: une équation différentielle de l'ordre n a un nombre n d'intégrales premières, chacune de l'ordre $n - 1$.

Soient fa, fb, fc , etc., ces intégrales premières; si l'on élimine la constante a entre $fa=0$, et $dfa=0$, on trouvera l'équation que nous avons désignée par $V=0$; car entre les quantités $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., renfermées dans cette équation, il ne peut pas y avoir de relations différentes. Par la même raison on tombera sur la même équation $V=0$, en éliminant la constante b entre $fb=0$ et $dfb=0$; ainsi de suite.

Si entre les intégrales premières $fa=0, fb=0, fc=0$, etc., qui, comme nous l'avons vu, ne renferment de variables que x, y , et les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, on élimine ces coefficients différentiels, on trouvera, entre x et y et les n constantes arbitraires, une équation qui sera l'intégrale finie complète de la proposée. Cette équation est onique sous quelque forme qu'elle se présente; par conséquent, si par un moyen quelconque, on peut trouver entre x, y et n constantes arbitraires, une équation qui satisfasse à la proposée, on pourra en conclure que cette équation en est l'intégrale finie complète.

Des équations linéaires.

338. Une équation différentielle entre deux variables x et y , est linéaire lorsque les expressions $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$, ne sont élevées dans cette équation qu'au premier degré: ainsi, en supposant que $A, B, C, D; \dots, N, X$, soient des fonctions de x , l'équation linéaire du n^o . ordre sera

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} \dots + N \frac{d^ny}{dx^n} = X \dots (116).$$

339. Il est facile d'intégrer cette équation lorsqu'elle est du premier degré, car elle se réduit à

$$Ay + B \frac{dy}{dx} = X;$$

chassant le dénominateur et divisant par B , on peut la mettre sous cette forme

$$dy + Pydx = Qdx \dots (117).$$

Pour l'intégrer on égalera y au produit de deux indéterminées X

et z , ce qui donnera

$$y = zX, \quad dy = z dX + X dz;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (117), on la transformera en

$$z dX + X(dz + Pz dx) = Q dx.$$

X étant arbitraire, on déterminera cette fonction en égalant entr'eux les termes qui ne sont pas sous la parenthèse, ce qui décomposera l'équation précédente en ces deux-ci :

$$X(dz + Pz dx) = 0, \quad z dX = Q dx;$$

la première nous donne

$$\frac{dz}{z} = -P dx, \quad \text{et} \quad \log z = - \int P dx \log e = \log e^{-\int P dx};$$

passant aux nombres, on a

$$z = e^{-\int P dx},$$

on tire de la seconde

$$dX = \frac{Q dx}{z} = Q e^{\int P dx} dx, \quad \text{donc} \quad X = \int Q e^{\int P dx} dx + C;$$

par conséquent,

$$zX, \quad \text{ou} \quad y = e^{-\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + C, \right]$$

340. Lorsque le terme en X est nul dans l'équation (116), si un nombre n de valeurs particulières, p, q, r , etc., mises successivement à la place de y , ont chacune la propriété d'y satisfaire, il suffira de multiplier p, q, r , etc., par des constantes arbitraires a, b, c , etc., pour conclure que l'intégrale finie complète de cette équation est

$$y = ap + bq + cr, \text{ etc.}$$

La démonstration de cette proposition étant la même pour tous les degrés, nous ne considérerons que l'équation

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \dots (118).$$

En mettant successivement à la place de y les valeurs hypothétiques p, q, r , nous aurons

$$Ap + B \frac{dp}{dx} + C \frac{d^2p}{dx^2} + D \frac{d^3p}{dx^3} = 0,$$

$$Aq + B \frac{dq}{dx} + C \frac{d^2q}{dx^2} + D \frac{d^3q}{dx^3} = 0,$$

$$Ar + B \frac{dr}{dx} + C \frac{d^2r}{dx^2} + D \frac{d^3r}{dx^3} = 0; \quad \cdot$$

multipliant ces trois équations, la première par a , la seconde par b et la troisième par c , et ajoutant les résultats, on trouve

$$\begin{aligned} & A (ap + bq + cr) + B \left(a \frac{dp}{dx} + b \frac{dq}{dx} + c \frac{dr}{dx} \right) \\ & + C \left(a \frac{d^2p}{dx^2} + b \frac{d^2q}{dx^2} + c \frac{d^2r}{dx^2} \right) \\ & + D \left(a \frac{d^3p}{dx^3} + b \frac{d^3q}{dx^3} + c \frac{d^3r}{dx^3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Or, il est évident que cette expression qui est identiquement nulle, est la même que celle qu'on obtiendrait en faisant $y = ap + bq + cr$, dans l'équation (118); donc cette valeur de y satisfait à l'équation (118); et comme elle renferme trois constantes arbitraires, elle est l'intégrale finie complète de l'équation (118).

341. Lorsque X n'est pas nul dans l'équation,

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} = X \dots (119).$$

Si l'on peut trouver trois valeurs particulières p, q, r , qui, mises successivement à la place de y satisfassent chacune à l'équation

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \dots (120),$$

l'intégrale finie complète de l'équation (119) sera

$$y = ap + bq + cr \dots (121);$$

mais alors a, b, c , au lieu d'être constantes, seront des fonctions de x , que nous apprendrons bientôt à déterminer.

Pour démontrer ce théorème, différencions l'équation (121), et divisons-la par dx , nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{dp}{dx} + b \frac{dq}{dx} + c \frac{dr}{dx} + p \frac{da}{dx} + q \frac{db}{dx} + r \frac{dc}{dx}.$$

Disposons des indéterminées a, b, c , par trois conditions : par la première, faisons

$$p \frac{da}{dx} + q \frac{db}{dx} + r \frac{dc}{dx} = 0 \dots (122),$$

il restera

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{dp}{dx} + b \frac{dq}{dx} + c \frac{dr}{dx}.$$

Une nouvelle différentiation nous donnera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \frac{d^2p}{dx^2} + b \frac{d^2q}{dx^2} + c \frac{d^2r}{dx^2} + \frac{da}{dx} \frac{dp}{dx} + \frac{db}{dx} \frac{dq}{dx} + \frac{dc}{dx} \frac{dr}{dx}$$

$$+ \frac{dc}{dx} \frac{dr}{dx} \dots \dots (123).$$

Pour remplir la seconde condition, posons

$$\frac{da}{dx} \frac{dp}{dx} + \frac{db}{dx} \frac{dq}{dx} + \frac{dc}{dx} \frac{dr}{dx} = 0 \dots (124),$$

il restera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \frac{d^2p}{dx^2} + b \frac{d^2q}{dx^2} + c \frac{d^2r}{dx^2};$$

différenciant encore et divisant par dx , il viendra

$$\begin{aligned} \frac{d^3y}{dx^3} = & a \frac{d^3p}{dx^3} + b \frac{d^3q}{dx^3} + c \frac{d^3r}{dx^3} + \frac{da}{dx} \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{db}{dx} \frac{d^2q}{dx^2} \\ & + \frac{dc}{dx} \frac{d^2r}{dx^2}. \end{aligned}$$

Pour remplir la troisième condition nous pouvons supposer

$$\frac{da}{dx} \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{db}{dx} \frac{d^2q}{dx^2} + \frac{dc}{dx} \frac{d^2r}{dx^2} = X \dots (125),$$

et l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a \frac{d^3p}{dx^3} + b \frac{d^3q}{dx^3} + c \frac{d^3r}{dx^3} + X.$$

Je dis maintenant que la valeur $y = ap + bq + cr$, satisfait à l'équation (119), car mettant dans cette équation la valeur de y , et par conséquent celles de ses coefficients différentiels, et effaçant les termes en X , qui se détruisent, on trouve

$$\begin{aligned} & A (ap + bq + cr) + B \left(a \frac{dp}{dx} + b \frac{dq}{dx} + c \frac{dr}{dx} \right) \\ & + C \left(a \frac{d^2p}{dx^2} + b \frac{d^2q}{dx^2} + c \frac{d^2r}{dx^2} \right) \\ & + D \left(a \frac{d^3p}{dx^3} + b \frac{d^3q}{dx^3} + c \frac{d^3r}{dx^3} \right) = 0 \dots (126). \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de démontrer que cette équation est identiquement nulle. Pour cet effet p, q, r satisfaisant à l'équation (120), on a

$$Ap + B \frac{dp}{dx} + C \frac{d^2p}{dx^2} + D \frac{d^3p}{dx^3} = 0,$$

$$Aq + B \frac{dq}{dx} + C \frac{d^2q}{dx^2} + D \frac{d^3q}{dx^3} = 0,$$

$$Ar + B \frac{dr}{dx} + C \frac{d^2r}{dx^2} + D \frac{d^3r}{dx^3} = 0;$$

multipliant la première de ces équations par a , la deuxième par b et la troisième par c , et ajoutant les résultats, on trouvera une équation identiquement nulle, qui sera la même que l'équation (126).

Pour déterminer a, b, c , les coefficients différentiels $\frac{da}{dx}, \frac{db}{dx}, \frac{dc}{dx}$ n'entrant qu'au premier degré dans les équations de condition (122), (124) et (125), nous pouvons éliminer deux de ces coefficients différentiels, et nous trouvons l'autre en fonction des expressions $\frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}$, etc., qui sont des fonctions de x , déterminées, puisqu'on connaît p, q, r , etc.; nous aurons donc des équations de la forme

$$\frac{da}{dx} = X', \quad \frac{db}{dx} = X'', \quad \frac{dc}{dx} = X''',$$

$$\text{ou } da = X' dx, \quad db = X'' dx, \quad dc = X''' dx,$$

et en intégrant, on déterminera a, b et c .

Ce théorème est applicable au cas où l'équation linéaire serait d'un ordre quelconque, par conséquent l'intégration de ces équations se réduit à celle de l'équation

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + N \frac{d^ny}{dx^n} = 0 \dots (127).$$

342. Lorsque l'équation linéaire de l'ordre n a des coefficients constants, il est facile d'en déterminer l'intégrale. En effet, si dans l'équation (127) on fait $y = e^{mx}$, on trouvera en différenciant

$$\frac{dy}{dx} = e^{mx} m, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{mx} m^2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = e^{mx} m^3, \text{ etc. ;}$$

substituant ces valeurs dans l'équation (127), on obtiendra

$$e^{mx} (A + Bm + Cm^2 + \dots + Nm^n) = 0 \dots (128);$$

soient m', m'', m''' , etc., les racines de l'équation

$$A + Bm + Cm^2 + \dots + Nm^n = 0 \dots (129),$$

l'équation (127) sera satisfaite par ces valeurs

$$y = e^{m'x}, y = e^{m''x}, y = e^{m'''x}, \text{ etc. ,}$$

et comme on a n valeurs de y , l'intégrale finie complète de l'équation (127) sera

$$y = ae^{m'x} + be^{m''x} + ce^{m'''x} + \text{etc.}$$

Lorsque $m' = m''$ les termes $ae^{m'x}$ et $be^{m''x}$, se réduisent à $(a + b) e^{m'x}$, et alors la somme $a + b$ devant être considérée comme une seule constante, on ne trouve plus un nombre n de cons-

tantes arbitraires dans l'expression de y . Dans ce cas, il a été démontré que si $y = e^{m'x}$ satisfait à la proposée, la valeur $y = xe^{m'x}$ doit aussi y satisfaire. En effet, en différenciant cette dernière équation on trouve

$$\frac{dy}{dx} = xe^{m'x}m' + e^{m'x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = xe^{m'x}m'^2 + 2e^{m'x}m',$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^{m'x}m'^3 + 3e^{m'x}m'^2 \text{ etc.};$$

ces valeurs réduisent l'équation (127) à

$$xe^{m'x} (A + Bm' + Cm'^2 + Dm'^3 + \text{etc.}) + e^{m'x} (B + 2Cm' + 3Dm'^2 + \text{etc.}) \dots (130).$$

Or, l'équation (129) ayant par hypothèse deux racines égales, on sait par la théorie des équations que l'expression $B + 2Cm' + 3Dm'^2 + \text{etc.}$, en renfermera une de moins que la proposée, et s'annulera lorsqu'on fera $m = m'$, d'où il suit que l'expression (130) est identiquement nulle. Par conséquent l'équation (127) sera satisfaite par la valeur $y = xe^{m'x}$, et aura pour intégrale complète

$$y = ae^{m'x} + bxe^{m'x} + ce^{m''x} + \text{etc.}$$

S'il y avait trois racines égales à m , on prouverait de même que l'équation (127) serait satisfaite en faisant

$$y = e^{m'x} + xe^{m'x} + x^2e^{m'x},$$

ainsi de suite.

Lorsque l'équation (129) a des racines imaginaires, si l'une de ces racines est $k + l\sqrt{-1}$, l'autre sera $k - l\sqrt{-1}$, et l'on aura dans la valeur de y ces deux termes

$$ae^{kx + lx\sqrt{-1}} + be^{kx - lx\sqrt{-1}},$$

ou
$$e^{kx} [ae^{lx\sqrt{-1}} + be^{-lx\sqrt{-1}}].$$

Mettant pour les exponentielles imaginaires leurs valeurs données par l'article (317), il viendra

$$e^{kx} [(a + b) \cos lx + (a - b) \sin lx\sqrt{-1}]. \quad (131).$$

Dans le cas où X est nul dans l'équation (116), a, b, c , étant des constantes arbitraires, nous pouvons supposer $a + b = c$, $a - b = c'\sqrt{-1}$; alors, la partie imaginaire qui est dans l'expression (131), s'évanouira.

FIN.

806745

580





Fig. 5.

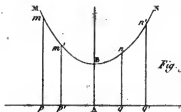


Fig. 9.

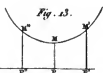


Fig. 13.

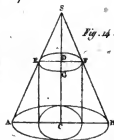


Fig. 14.



Fig. 20.

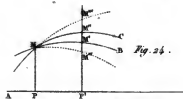
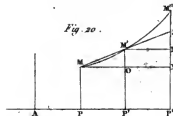


Fig. 24.





Fig. 34.

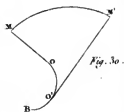


Fig. 30.



Fig. 36.

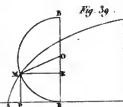


Fig. 39.

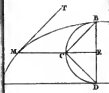


Fig. 47.



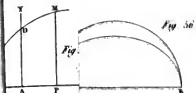
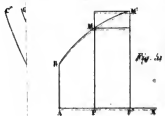


Fig. 56.



Fig. 57.

